

"METODOS DE ANALISIS DEL IMPACTO DE BARCOS CONTRA  
PILAS DE PUENTES. APLICACION AL  
PUENTE SOBRE EL ESTRECHO DE GIBRALTAR"

Avelino Samartín Quiroga<sup>(\*)</sup>

INFORME PRESENTADO A LA SOCIEDAD ESPAÑOLA  
PARA LA COMUNICACION DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR  
(SECEG)

DICIEMBRE, 1983

(\*) Catedrático de Análisis de las Estructuras. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Santander.

# I N D I C E

	<u>Pág.</u>
CAPITULO 1.- INTRODUCCION.....	2
1.1 Planteamiento general.....	2
1.2 Acciones.....	6
1.3 Problema del impacto.....	13
1.4 Técnicas de análisis.....	16
1.5 Sistemas de protección de pilas.....	20
1.6 Resumen.....	23
REFERENCIAS.....	24
 CAPITULO 2.- METODOS EXPERIMENTALES Y APROXIMADOS DE CALCULO DE IMPACTO.....	 27
2.1 Métodos experimentales.....	27
2.2 Métodos empiricos de cálculo.....	35
2.2.1 Conceptos previos.....	35
2.2.2 Mecánica del impacto.....	37
2.2.3 Fuerzas en el choque en ángulo recto contra pila	42
2.3 Métodos aproximados de cálculo del impacto.....	44
2.3.1 Planteamiento del problema.....	44
2.3.2 Clasificación de los métodos aproximados.....	47

	<u>Pág.</u>
2.4 Teoría práctica del impacto. Coeficiente de restitución	48
2.4.1 Introducción.....	48
2.4.2 Impacto central.....	51
2.4.3 Impacto general.....	53
2.4.4 El coeficiente de restitución.....	60
2.5 Impacto entre estructuras elásticas.....	64
2.5.1 Generalidades.....	64
2.5.2 Procedimiento quasi-estático del análisis del impacto central.....	66
2.5.3 Sistemas con un grado finito de grados de libertad	72
2.6 Fenómenos ondulatorios en el impacto.....	83
2.6.1 Introducción.....	83
2.6.2 Ecuación del movimiento.....	84
2.6.3 Vibraciones libres.....	87
2.6.4 Vibraciones forzadas.....	91
2.6.5 Estructuras amortiguadas.....	98
2.7 Análisis de la programación de ondas. Caso monodimensio- nal.....	100
2.7.1 Introducción.....	100
2.7.2 Ecuación de la programación de ondas.....	101
2.7.3 Condiciones iniciales y de contorno.....	104
2.7.4 Influencia de las discontinuidades de la estructu- ra.....	108
2.8 Análisis de la propagación de las ondas. Formulación general.....	115
2.8.1 Notación y definiciones previas.....	115

	<u>Pág.</u>
2.8.2 Ecuaciones fundamentales de la onda elástica....	120
REFERENCIAS.....	125

### CAPITULO 3.- SIMULACION NUMERICA DE LOS FENOMENOS DE IM-

PACTO.....	129
3.1 Consideraciones generales.....	129
3.2 Hipótesis fundamentales.....	133
3.3 Métodos de discretización.....	137
3.4 Descripciones de las mallas.....	139
3.5 Esquemas de integración en el tiempo.....	143
3.6 Requisitos de computación.....	145
3.7 Modelo del material.....	146
3.8 Capacidad existente de cálculo automatizado.....	148
3.8.1 Programas lagrangianos bidimensionales.....	148
3.8.2 Programas eulerianos bidimensionales.....	150
3.8.3 Programas tridimensionales.....	151
3.9 Posibles desarrollos futuros.....	153
REFERENCIAS.....	161

### CAPITULO 4.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES DE TRABAJO....

4.1 Comentarios generales.....	164
4.2 Método aproximado. Carga límite.....	167
4.2.1 Introducción.....	167
4.2.2 Método de la carga límite.....	169
4.3 Propuesta tentativa de la metodología de cálculo del impacto de buques contra pilas de puente sobre el Es- trecho de Gibraltar.....	172

REFERENCIAS.....	176
------------------	-----

APENDICE A.- REVISION DE LA MECANICA DEL CONTINUO.....	177
--	-----

A.1 Introducción.....	177
-----------------------	-----

A.2 Ecuaciones cinemáticas. Movimientos.....	178
--	-----

A.3 Ecuaciones cinemáticas. Medidas de deformación.....	181
---	-----

A.4 Ecuaciones de equilibrio.....	185
-----------------------------------	-----

A.5 Método de formulación.....	196
--------------------------------	-----

A.6 Ecuaciones del movimiento.....	198
------------------------------------	-----

A.6.1 Planteamiento general.....	198
----------------------------------	-----

A.6.2 Discretización espacial. Método de los elementos finitos.....	200
--	-----

A.6.3 Métodos de solución.....	202
--------------------------------	-----

APENDICE B.- ALGORITMO DEL IMPACTO.....	205
---	-----

B.1 Planteamiento teórico.....	205
--------------------------------	-----

REFERENCIAS.....	217
------------------	-----

APENDICE C.- PROGRAMAS DE COMPUTADOR DE SIMULACION DEL IM- PACTO TRIDIMENSIONAL.....	218
---	-----

C.1 Introducción.....	218
-----------------------	-----

C.2 Códigos lagrangianos.....	221
-------------------------------	-----

C.3 Códigos eulerianos.....	226
-----------------------------	-----

REFERENCIAS.....	232
------------------	-----

	<u>Pág.</u>
APENDICE D,- ITERACION FLUIDO-ESTRUCTURA.....	235
D.1 Introducción.....	235
D.2 Procedimiento euleriano.....	237
D.3 Procedimiento lagrangiano.....	242
REFERENCIAS.....	250

## RESUMEN

Se describe en este informe la problemática estructural que aparece en el análisis del impacto entre sólidos deformables con especial énfasis en el caso del choque de una embarcación contra una pila de puente. Se lleva a cabo una revisión de los procedimientos de cálculo existentes, extendiendo el estudio desde los modelos mas simples de impacto entre cuerpos rígidos hasta los métodos basados en una formulación rigurosa de la mecánica de los medios continuos. Se comentan los programas de computador existentes para resolver estas situaciones de impacto y las técnicas que permiten considerar la influencia de las fuerzas hidrodinámicas en el choque. Por último se expone una metodología tentativa de diseño y cálculo de las defensas de las pilas ante la acción del choque de una embarcación.

## CAPITULO 1.- INTRODUCCION

### 1.1 PLANTEAMIENTO GENERAL

En el reciente Coloquio Internacional sobre la factibilidad de una comunicación fija a través del Estrecho de Gibraltar, que tuvo lugar en Madrid los días 9 al 13 de Noviembre de 1982, el ponente general sobre la solución puente, decía textualmente:

"Queda aún un problema que tratar en relación con las pilas del puente, y es el choque de barcos contra las pilas. Este problema se relaciona con otros dos. El primero es la determinación de la probabilidad de que un barco quede fuera de control en las inmediaciones del puente y la elección del nivel de riesgo que debe adoptarse. Este estudio debe acompañarse por medidas regulatorias del tráfico marino y por sistemas de señalización que reduzcan riesgos a un mínimo.

El segundo problema se refiere a la defensa real de la pila para que no se produzcan roturas de la misma".

Este informe intenta ser una aportación a un mayor entendimiento de los dos anteriores problemas, considerándo en ellos los aspectos de las posibilidades de un análisis dentro de la perspectiva de los importantes avances alcanzados en la actualidad en los procedimientos de computación.

En los últimos años, se ha dedicado una considerable atención al estudio del impacto de embarcaciones contra pilas de puentes. Existen abundantes estadísticas que muestran un incremento considerable en el número



e importancia de las colisiones de embarcaciones contra objetos fijos, (pilas de puente). Una de las causas mas importantes de este incremento se encuentran en la tendencia reciente a la construcción y diseño de barcos capaces de transportar mayores cargas. Por otra parte, el tráfico marítimo ha experimentado un aumento considerable. Recientes estudios (1) muestran que el número de choques de barcos contra pilas de puentes en USA solamente se ha duplicado entre los años 1969 y 1975. Los resultados de estos accidentes representan pérdidas del orden de veintitres millones de dolares y catorce vidas humanas. Estas cifras han sido elevadas por el mismo autor, en publicación mas cercana (2). Las estadísticas generalmente no recogen accidentes pequeños, que ocurren casi adiarario. Muchos de los cuales no se notifican y sus costes de reparación se soportan por unos pocos individuos o compañías. Los accidentes importantes son aquellos en los que una una embarcación de gran tonelaje choca contra la pila de un puente dañandola gravemente e inutilizando el puente durante un periodo de tiempo considerable. Esta clase de accidentes casi siempre obtiene resonancia nacional, la embarcación aparece muy dañada y frecuentemente acompaña pérdidas de vidas humanas (del tráfico que circula por el puente).

Por ejemplo en los Estados Unidos, en los que existe aproximadamente 100 puentes importantes situados en zona de tráfico marítimo de embarcaciones de gran tonelaje, han ocurrido 11 colisiones importantes de acuerdo con la definición anterior (Sunshine Skyway Bridge en 1980, West Seattle Bridge en 1978, Benjamin Harrison Bridge en 1977 entre otros casos). Cincuenta y tres personas han muerto, y los costes de reconstrucción ascendieron a mas de 100 millones de dolares, aparte de suponer

un cierre de estas arterias de tráfico por mas de dos años en cada caso.

Esta situación se ha repetido en otras partes del mundo. Puente de Maracaibo (dos veces), el Puente de Tasman, el puente de Almö para los que las pérdidas en vidas humanas sobrepasa el centenar solamente para los cuatro accidentes citados.

---

Por lo tanto, cabe esperar de que 1 de cada 10 puentes situados en un tráfico marítimo, sea parcialmente destruido durante su vida de servicio. Si se considera que la mayoría de las catástrofes anteriores han ocurrido en los últimos diez años y se supone una vida útil del puente de cincuenta años, significa que la mitad de los puentes en zonas de navegación intensa sufrirán un accidente de choque.

En muchos casos esta energía del choque no podrá ser absorbida totalmente por la pila y de este modo, aparece una rotura y un posible colapso estructural. La mayoría de los puentes diseñados no disponen de una adecuada defensa y en general, estan desprotegidos ante estos efectos de impacto. Cuando las embarcaciones eran pequeñas y el nivel del tráfico marítimo bajo, esta situación era admisible ya que los choques podran ser resistidos por las pilas sin protección. Actualmente, con embarcaciones gigantescas, esta situación no es adecuada, puesto que, con el tamaño de las grandes embarcaciones existentes, la producción de un solo impacto sería suficiente, en la mayoría de las ocasiones, para destruir el puente. Se concluye que es preciso en el proyecto de un puente actual, situados en un tráfico marítimo, analizar en detalle la necesidad de disponer posibles medidas de protección de sus pilas contra cho-

que de embarcaciones de ese tráfico. El diseño de la protección de las pilas de un puente constituye una importante faceta de ingeniería estructural, puesto que en general sin tal protección pueden ocurrir importantes desastres.

La consideración de los efectos producidos por la colisión de un barco con una pila de un puente sobre el Estrecho de Gibraltar constituye una exigencia en un diseño adecuado de la estructura. En efecto, la existencia de un tráfico marítimo intenso -con barcos que pueden alcanzar las 500.000 toneladas- las importantes corrientes que se generan en la zona, representan factores que, incluso con una estricta regulación y control de la navegación en el Estrecho, elevan la probabilidad de ocurrencia de este suceso (3). Sin embargo, una comprobación adecuada de la integridad estructural del puente bajo la acción del choque de un barco debería llevarse a cabo únicamente en estados avanzados del proyecto. Un cálculo de este tipo precisa un esfuerzo computacional muy importante y por otra parte, las consecuencias del choque, raras veces modifican los parámetros significativos del diseño y su concepción general, y solo en algunos casos exige la modificación de detalles constructivos y la disposición del pertinente sistema de defensa alrededor de las pilas. A estos efectos, es importante resaltar la reciente reunión especializada (4), en la que se han alcanzado conclusiones más elaboradas.

En este informe se presenta en primer lugar la problemática general del fenómeno del choque de un barco contra las defensas de las pilas de un puente. Se formulan modelos matemáticos aproximados para el estudio estructural de los efectos del impacto. Alternativamente se expone la -

teoría general de la dinámica del impacto, cuya aplicación al caso particular del choque del barco con las defensas de las pilas no representa dificultades adicionales.

Se señalan algunos programas de computador, que permiten llevar a cabo el complejo análisis dinámico no lineal (en grandes movimientos y deformaciones, con materiales, suelo, hormigón, acero y agua, con características constitutivas altamente no lineales) y deducir así los efectos del choque entre estructuras tridimensionales. Las posibilidades de aplicación de estos procedimientos a un futuro puente sobre el Estrecho de Gibraltar se comentan y analizan, recomendándose una metodología a seguir.

## 1.2 ACCIONES

Los riesgos y las consecuencias de las colisiones de barcos son de importancia determinante en el diseño del puente sobre el Estrecho. El diseño adecuado de las estructuras de protección de las pilas requiere un entendimiento global de la potencialidad de detención del barco y de formación de dichas estructuras ante una colisión. Existen numerosos procedimientos de análisis de las consecuencias de un choque: matemáticos y experimentales. Sin embargo, las circunstancias de la colisión pueden modificar de un modo esencial los resultados de estas. Así la velocidad, dirección, tamaño, forma y rigidez de la embarcación y la resistencia y forma geométrica de la estructura de protección constituyen parámetros fundamentales a definir en el fenómeno del impacto. Se hace preciso, así mismo, conocer el nivel de probabilidad de aparición de un accidente con

unas características determinadas. Para ello es preciso obtener una serie de datos estadísticos que se comentan a continuación.

En (1) se describe la información recogida en relación con la defensa del Tobin Memorial Bridge en Boston (USA). En ella se incluyen datos como los siguientes; que pueden ser aplicables a la navegación en el Es-trecho.

- Tamaño y frecuencia de uso de la via marítima.
- Tipo de carga de estas embarcaciones de acuerdo con su tamaño.
- Velocidad de las embarcaciones.
- Asistencia y dispositivo de guado y aviso.
- Dimensiones geométricas típicas de las embarcaciones de acuerdo con su tamaño.
- Velocidad de la corriente y condiciones de viento.
- Datos del suelo de cimentación de las pilas del puente (de interés en el caso de cimentar las defensas de la pila).
- Diferencia máxima entre mareas.
- Visibilidad.
- Distribución de la carga según las dos direcciones (particularmente importante si los petroleros van generalmente vacíos en una dirección).
- Previsiones acerca de futuras construcciones de nuevas embarcaciones gigantes.

Un intento de evolución de la probabilidad de un accidente de choque de barco contra un objeto fijo (pila de puente) ha sido descrito en

(5) para la restauración del puente de Tasman. En primer lugar analiza las causas de accidentes, haciendo notar el hecho de que los barcos carecen de frenos (\*). La visibilidad (casos de nieblas), fallos humanos (confusión en las órdenes o equivocación del capitan), fallos mecánicos y otras causas (mareas o corrientes anormales, rafagas, tormentas severas, regulaciones de navegación inadecuadas, excesiva densidad del tráfico, fallos en las ayudas a la navegación) son los cuatro grandes grupos causantes de choque de barcos contra pilas de puentes. A continuación describe tres procedimientos de evaluación de la probabilidad de acontecimiento de un accidente de este tipo: Estadístico, histórico y empírico.

En el primero con los datos locales se obtienen unos intervalos de confianza muy grandes y por lo tanto sin utilidad. La extensión de los datos estadísticos a nivel mundial o a un grupo seleccionado de naciones marítimas presenta el problema adicional de que algunos son incompletos, restringidos a colisiones importantes. Por lo tanto el modelo sencillo que se utiliza en tráfico y que expresa el número de choques, que se producen al año como una fracción (factor de riesgo) del tráfico total es inadecuado, por la carencia de datos suficientes. Existe un modelo en Japon y Gran Bretaña que determina la probabilidad de ocurrencía de accidentes marítimos mediante la ecuación:

$$T = G \cdot C \quad (1.1)$$

---

(\*) Un barco de 20.000 toneladas desplazadas precisa 2 Km para detenerse a partir de una velocidad de 7 nudos aproximadamente.

en donde

T = es la probabilidad total de colisión.

G = es el factor geométrico relacionado a un sitio particular. Corresponde a un concepto importante puesto que considera independiente las restricciones geométricas del lugar y afecta por lo tanto a la probabilidad. Existen dos métodos de evaluación de este factor que se comentan más adelante.

C = corresponde a un factor que incorpora las causas del choque, que han sido resumidas anteriormente. Este factor es totalmente independiente de las restricciones geométricas y es función de todos los factores relacionados con la navegación del lugar. Recibe diversos nombres, según el país (probabilidad de causa, probabilidad de mala maniobra, etc) y evidentemente es dependiente su valor de las características locales de la ubicación del puente y su tráfico marítimo.

El factor geométrico G, se define en el método japonés como:

$$G = \frac{\text{espacio ocupado (pilas mas eslora del barco)}}{\text{ancho total navegable}}$$

En el método desarrollado por Macduff del Bureau Veritas, el valor de G se determina de un modo más complicado mediante la expresión:

$$G = \frac{180 - (\text{sector libre})}{180}$$

Otro procedimiento de evaluación de la probabilidad de ocurrencia de choque de barco contra pilas de puente es el histórico. Este procedimiento consiste básicamente en traducir estadísticamente los datos obtenidos de otros puentes situados en condiciones semejantes y que hayan sufrido accidentes de barcos. La tabla 1.1 muestra el estudio llevado a cabo en (5) para el puente de Tasmania. Algunos de los datos allí conseguidos son estimados, resultando un periodo de retorno para embarcaciones importantes del orden de 38 años.

Por último el procedimiento empírico utilizado por Capitan Brady se basa en los numerosos datos recogidos de la navegación por el Canal de Suez. Se comprueba que una media de 7.5 barcos por año sufre un accidente de máquina o maniobra, resultando una parada de emergencia para los mismos. Conociendo el tráfico anual y la longitud del Canal es posible extrapolar los resultados allí obtenidos a otros puntos. En el caso del puente de Tasmania condujo este procedimiento a un valor de 38 años para el periodo de retorno.

Las técnicas de evaluación de la probabilidad de ocurrencia de un choque que se acaban de comentar pueden ser aplicadas al proyecto del puente del Estrecho de Gibraltar. Sería importante estimar la probabilidad de ocurrencia de una catástrofe importante considerando las circunstancias del impacto (velocidad y tamaño del buque, ángulo de ataque etc) que se han descrito. El periodo de retorno de cada tipo de choque y sus consecuencias económicas en términos de coste-beneficios deberían ser evaluados con objeto de diseñar las defensas de las pilas de acuerdo con unos valores máximos racionales.



TABLA 1.1.- Proporción de accidentes en choques de embarcaciones contra pilas.

Nombre del puente y fecha de terminación	Número de accidentes	Ancho de Navegación	Proporción de accidentes a tráfico	Ajuste por niebla	Ajuste por corriente	Ajuste por proporción de tráfico	Factor geométrico			Ajuste por factor geométrico	Ajuste por tráfico	Número equivalente de tráfico
							Distancia del puente 300 m	600 m	Media			
Tasman bridge 1964	1	73 m	1 en 12000*	-	-	1 en 12000* a 31/12/77	0.55	0.37	0.46	x 1.0	1 en 12,000 a 31/12/77	12,000
Old Hobart Lift Span 1943	0	44.77 m	ninguno en 6600	-	x 1.5 <	1 en 10000	0.60	0.48	0.54	x $\frac{.54}{.46}$	< 1 en 11,77	11,000
Newport News	0	76.0 m	ninguno en 6000	x2	x 1	ninguno en 8800	0.38	0.22	0.30	x $\frac{.30}{.46}$	ninguno en 5,700	6,000
Benjamin Harrison Aprox. 1951	1	61.40 m	1 en 3500	x2	x 1	1 en 7000	0.38	0.22	0.30	x $\frac{.30}{.46}$	1 en 4,565	5,000
Antioch 1926	3	61.0 m	3 en 14000	x3	x 1	1 en 14000	0.40	0.25	0.33	x $\frac{.33}{.46}$	1 en 10,000	30,000
Benecia-Martínez 1969 1942	0	146.0 m	ninguno en 2750	x3	x 2	niguno en 16500	0.37	0.25	0.31	x $\frac{.31}{.46}$	< 1 en 11,120	11,000
road rail	2	88.7 m	2 en 12250	x3	x 2	2 en 73500	0.70	0.56	0.63	x $\frac{.63}{.46}$	1 en 50,330	101,000
Welland Canal aprox. 1932	1	61.0 m	1 en 192000	barcos	x 1.5	< 1 en 288000	0.50	0.02	0.035	x $\frac{.035}{.46}$	< 1 en 22,000	22,000
Beauharnois Canal	-	61.0 m	ninguno en 141000	barcos	x 1.5	< 1 en 211000	0.57	0.38	0.475	x $\frac{.47}{.46}$	< 1 en 218,000	218,000
Goole Aprox. 1880	1	33.5 m	1 en 30000 a 1 en 60000 4670	x14	-	Aprox. 1 en 70000	No existen detalles. Hipótesis aprox.			x $\frac{.30}{.46}$	Aprox. 1 en 45,600	46,000
es decir												Total
accidentes total 9 Tráfico total aprox. 435,000												

\*) No se consideran embarcaciones pequeñas.

A partir de la geometría de las pilas, añadiendo la mitad de la eslora del barco se puede obtener simplemente el factor geométrico. El concepto se puede considerar efectivo a una distancia igual o menor que la distancia de parada del barco (figura 1.1).

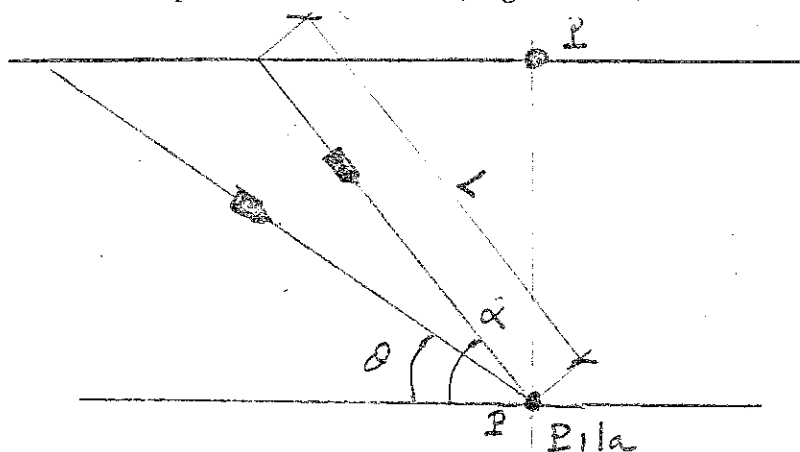


FIGURA 1.1 Determinación del factor geométrico.

Cuando la distancia  $L$  es mayor que la distancia de parada el ángulo  $\alpha$  se puede considerar un sector libre.

El factor  $C$  se obtiene a partir de datos fiables en zonas de intensa navegación. Por ejemplo en el Canal de la Mancha, en el Estrecho de Akashi entre otras zonas. Conviene tener presente que estos datos pueden incluir choques entre barcos así como accidentes con objetos fijos, siendo preciso un análisis cuidadoso de los mismos. Por ejemplo, la distribución de causas de choques en el Canal de la Mancha es: Visibilidad (25%), errores humanos (30%), fallos mecánicos (25%) y otros factores (29%) y el valor total de la probabilidad de causa es del orden de  $1/7000$ . Es posible la extrapolación de estos datos a otros lugares, obteniéndose así por ejemplo, para el puente de Tasmania un periodo de retorno entre 11 y 29 años.

Una posibilidad prometedora en esta dirección corresponde a la utilización de modelos matemáticos aplicados a otros tipos de accidentes (aviación, misiles, terremotos, etc) para adaptarlos al caso particular de impacto de embarcaciones con obstáculos fijos y deducir de este modo el impacto de diseño o en el caso muy general de distribución de probabilidad de ocurrencia de un choque con unas circunstancias determinadas. Las referencias (6) y (7) proporcionan algunos de estos modelos.

### 1.3 PROBLEMA DEL IMPACTO

Se presenta en este apartado una revisión del estado de conocimientos acerca del análisis de materiales y estructuras sometidas a cargas de corta duración (impulso). Se pondrá especial énfasis en los problemas de impacto -colisión de dos o mas cuerpos- y los desarrollos en curso basados en modelos en diferencias y elementos finitos tridimensionales que simulan los fenómenos de impacto. Existe una abundante bibliografía sobre el tema, y las referencias (8) y (9) cubren resúmenes de varios miles de artículos asociados con el problema general del impacto y los libros (10) y (11) se recomiendan al lector interesado en una mas amplia información. Se insinuaran, asimismo, los avances y desarrollos que se anticipan en computadores (de tipo vectorial), en la caracterización de los materiales bajo velocidades altas de deformación y en las técnicas numéricas de simulación que contribuirán a mejorar el diseño de las estructuras sometidas a cargas de impacto.

Las limitaciones existentes en un análisis de impacto son las siguientes:

- (a) La matemática compleja que exige una solución rigurosa, lo que normalmente se recurre a métodos aproximados.
- (b) La definición adecuada de los sistemas físicos con sus discontinuidades en material y geometría, así como, las condiciones de la colisión.
- (c) El conocimiento preciso del comportamiento de los materiales, su respuesta y rotura bajo velocidades rápidas de deformación.

El estudio del fenómeno del impacto relaciona una gran variedad de disciplinas clásicas. En el régimen de bajas velocidades ( $< 250$  m/seg.) muchos problemas están comprendidos dentro del área de la dinámica de estructuras. Existen indentaciones locales y penetraciones fuertemente acopladas a la deformación global de la estructura. Frecuentemente, el impactador (embarcación) puede ser sustituido, según la teoría de contacto de Hertz (10), por una distribución de carga equivalente actuando sobre una área conocida y en un tiempo dado. El análisis del objetivo (defensa del puente) se efectúa utilizando las técnicas convencionales del análisis estructural. Los tiempos de respuesta y carga típicos en esta situación son del orden del milisegundo. Cuando la velocidad del impactador aumenta ( $0,5 - 1,5$  km/seg) la respuesta de la estructura está dominada por el comportamiento del material en una pequeña zona del área impactada (del orden de 2 a 3 veces el diámetro o distancia transversal máxima del impactador). El fenómeno debe ser descrito en términos de propagación de ondas y en las distintas etapas del proceso se manifiesta la influencia de la velocidad, geometría, constitución del material, veloci-

dad de deformación, fluencia plástica local y rotura. En esta situación el regimen de carga y respuesta es del orden de los microsegundos. Un incremento de la velocidad del impactador (proyectil) en el rango (2-3 Km/seg) conduce a presiones localizadas que exceden en un orden de magnitud la resistencia del material. Los cuerpos que chocan pueden ser tratados en las etapas iniciales del impacto como fluidos. A velocidades ultrarápidas (>12 Km/seg) los cambios energéticos se producen a tan altas velocidades que resultan vaporización explosiva de los cuerpos en choque. La tabla 1.2 clasifica los diferentes tipos cualitativos de choque a partir de la velocidad relativa entre los cuerpos  $V_s$  y la velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$ . Evidentemente los valores de la tabla deben ser considerados como ordenes de referencia únicamente, ya que en el tipo de impacto existen otros parámetros además de la velocidad  $V_s$  que regulan su comportamiento.

$\dot{\epsilon}$	$V_s$	EFEECTO
$10^8$	>12 Km/seg.	Impacto explosivo, cuerpos se vaporizan.
$10^6$	3-12 Km/seg.	Compresibilidad hidrodinámica del material debe ser considerada.
	1-3 Km/seg.	Materiales se fluidifican. Las presiones se acercan o exceden la resistencia del material.
$10^4$	5000-1000 m/seg.	Material viscoso con resistencia todavía significativa.
$10^2$	50-500 m/seg.	Material primordialmente elástico.
$10^0$	<50 m/seg.	Material primordialmente elástico. Plasticidad local.

TABLA 1.2. Respuesta de los materiales al impacto.

Un tratamiento completo de la respuesta al impacto de estructuras y materiales precisaría tener en cuenta la geometría de los cuerpos que chocan, la propagación de las ondas elásticas, plásticas y de choque, el flujo hidrodinámico, los movimientos y deformaciones finitas, la influencia del cambio rápido de deformación, el trabajo de endurecimiento, los efectos térmicos y friccionales, y la iniciación y propagación de fracturas en los materiales. Un procedimiento analítico que incluyese todos estos aspectos sería una tarea formidable que requeriría un elevado grado de caracterización bajo cargas ultrarápidas que no es alcanzable en la práctica. Mucho del trabajo realizado en la mecánica del impacto es, por consiguiente, de naturaleza experimental.

Dentro de la perspectiva anterior, el estudio del choque entre barco y pilas del puente, corresponde a una situación simple, de clase  $V_s < 50$  m/seg. y por lo tanto salvo plasticidad local, el comportamiento de los materiales permanece elástico. Sin embargo, si se disponen ciertas situaciones de defensas alrededor de las pilas, puede ser interesante desde el punto de vista de proyecto, que el área plástica sea muy grande con objeto de absorber al máximo la energía cinética de la embarcación. Por otra parte si se considera el fluido colindante y en numerosos casos el suelo de la cimentación, se comprende que los aspectos no lineales del material, en fase elástica deben de ser tenidos en cuenta.

#### 1.4 TECNICAS DE ANALISIS

Con objeto de establecer los mecanismos incluidos en el fenómeno del impacto hay dos vías independientes pero complementarias: la experimenta-

ción y la analítica o matemática.

Dentro de la primera existen numerosas técnicas, algunas utilizadas en impacto con altas velocidades y por lo tanto de interés en la Defensa. Los desarrollos recientes en cineradiografía y fotografía de alta velocidad, referencias (12) y (13), permiten la determinación de las historias temporales del movimiento del material durante el proceso de impacto. Los ensayos instrumentados de choques recogen información valiosa acerca de las superficies de deformación y tensional en el cuerpo impactado (objetivo, la cual es de fundamental importancia en la comprobación de los métodos numéricos de simulación. Las instalaciones PHERMEX en el Los Alamos Scientific Laboratory permiten analizar fenómenos de impacto de altas velocidades mediante fuentes de rayos X de 6 MEV capaces de penetrar en pulsos de corta duración, varias decenas de centímetros de acero y recoger así radiografías de comportamiento del objetivo). Afortunadamente las fuerzas de impacto debidas a choques de barcos contra pilas de puentes pueden ser evaluadas mediante técnicas menos sofisticadas. Así en Alemania, en la "Gesellschaft für Kernenergieverwertung in Schiffbau und Schifffahrt GmbH (GKSS)" y en Howaldtswerke-Deutsche Werft AG, llevaron a cabo durante los años 1967-1976 un total de 24 ensayos de colisión con 12 parejas de modelos de barco a escalas 1:7,5 y 1:12. Se examinaron modelos de líneas de pasajeros, contenedores y barcos cisternas de hasta 195000 toneladas de peso bruto. Una descripción de esta experimentación puede verse en (14).

Ensayos mas recientes, algunos todavia en estado de desarrollo, se estan llevando a cabo en el Danish Hydraulic Institute y en el Danish

Geotechnical Institute de Copenhagen. Las técnicas y resultados que se están obteniendo se desean utilizar para el estudio del sistema de protección del Puente Gran Belt (Dinamarca), de construcción prevista y actualmente postpuesta. Este puente de 19 Km de longitud servirá los tráficos de carretera y ferrocarril entre las islas danesas de Funen y Zealand, cruza la vía principal de navegación que une el Mar del Norte y los países bálticos, con 20.000 embarcaciones por año y con cargas muertas hasta 250.000 Toneladas. La referencia (15) presenta algunos resultados obtenidos hasta ahora en esta experimentación. La importancia de este tipo de ensayos no puede ser disminuida como complemento de los procedimientos basados en modelos matemáticos.

Los métodos analíticos o matemáticos tienden a dividirse en tres categorías:

- (a) Métodos empíricos o cuasi-analíticos. Las ecuaciones algebraicas se formulan con base a un gran número de datos experimentales, que son utilizados para predecir el resultado de experimentos o diseños posteriores. En general, estos métodos están relacionados con un tipo específico de diseño o estructura, y no permiten los esfuerzos de investigación en esta dirección avanzar de un modo significativo en el entendimiento del fenómeno del impacto.
- (b) Métodos analíticos aproximados. Se concentran normalmente en algún aspecto del problema del impacto, introduciendo hipótesis simplificadoras en las ecuaciones que rigen el fenómeno físico, reduciéndolas a ecuaciones algebraicas o diferenciales mono o bidimensionales.



Salvo escasas excepciones, tratan uno de los cuerpos -el impactador o el objetivo- como rígidos. Por otra parte, casi todos los análisis de este tipo requieren ciertos datos de tipo empírico o características del material no medibles o asequibles fácilmente.

- (c) Métodos numéricos. Permiten la resolución completa de los problemas de impacto. En efecto, los métodos de elementos finitos y diferencias finitas permiten atacar el conjunto completo de las ecuaciones de campo que proporciona la física del continuo. Estos métodos son de naturaleza aproximada ya que resuelven un sistema de ecuaciones discretas en lugar de las ecuaciones diferenciales correspondientes. No obstante, los errores inherentes a esta discretización están acotados y son, por el momento mucho menores que los asociados a las propiedades de los materiales. El desarrollo de estos métodos se centra en la actualidad en la elaboración de códigos de computador para cálculo de impacto y propagación de ondas entre cuerpos tridimensionales.

El cálculo computacional con sus inherentes ventajas de un tratamiento completo del problema del impacto y una representación adecuada de la geometría de los cuerpos que colisionan presenta su contrapartida, particularmente en el área de las altas velocidades. En efecto, estos cálculos exigen una descripción muy detallada de las ecuaciones constitutivas de los materiales que se manejan, particularmente en el rango de las altas velocidades y en la región cercana a la rotura. Este tipo de información está, en el estado actual de conocimiento, en fase de desarrollo y resultados están siendo diseminados entre la comunidad científica. Conviene tener en cuenta, el hecho de que los códigos de computador son tan buenos

como la descripción del material que contengan. La tabla 1.3 adaptada de la referencia (16) compara las técnicas experimentales en escala grande con los programas de computador tridimensionales. El análisis de esta tabla lleva a la conclusión que ninguna de ambas técnicas son suficientes y que en cada caso una combinación juiciosa de las mismas es lo mas acertado.

RESTRICCIÓN	SIMULACION NUMERICA	EXPERIMENTACION A GRAN ESCALA
-Coste	Más economía.	Un orden de magnitud mas caro.
-Tiempo	Precisa diseñar y compro <u>bar</u> la malla. Interpre <u>ta</u> ción de resultados.	Exige tiempo de fabricación del modelo. En general es mas dura <u>dero</u> .
-Información	Muy completa.	No tan detallada.
-Incertidumbre	Modelo del material	Sólo la debida a la dispersión del ensayo.
-Utilidad	Muy flexible. Facilidad de análisis paramétricos.	Rígido. En general modelos des <u>tr</u> uctivos.

Tabla 1.3. Cálculo versus experimentos.

### 1.5 SISTEMAS DE PROTECCION DE PILAS

En el Coloquio patrocinado por la Societé Nationale d'Etudes de Detroit, mantenido en Tanger en mayo de 1982, se llegó a la conclusión que la única solución admisible ante un posible choque de barco contra una pila del puente de Gibraltar es aquella que intenta reducir la intensidad del choque y que permite salvar de este modo tanto al puente como a la embarcación. Es decir, la resistencia del impacto únicamente por la pila y la estructura del puente sin defensa no parece factible, puesto que se producen unos esfuerzos y movimientos muy considerables dada la elevada

profundidad de las pilas en la parte central del puente (del orden de 250 m de altura sumergida).

Los dispositivos consecuentemente aplicados para reducir el impacto contra pilas de puente y en general construcciones fijas han sido enumerados en (2) y mas recientemente dentro del Coloquio de Madrid en (17). Se pueden agrupar como sigue:

(a) Instalaciones de guiado , aviso y alarma.

Reducen la probabilidad de la ocurrencia de un choque pero no eliminan la producción de un accidente. Deberia protegerse el puente de Gibraltar con sistemas de este tipo.

(b) Islas artificiales alrededor de las pilas.

Constituye un sistema de protección muy adecuado. El Instituto Danés de Hidráulica está considerando su utilización en el diseño del puente Gran Belt (15). Sin embargo, en el caso del puente sobre el Estrecho de Gibraltar no parece conveniente por la importante reducción del ancho útil de navegación debido a la excesiva profundidad de las pilas en los tramos centrales, y las considerables influencias ecológicas negativas que produciría en la zona.

(c) Dolfines.

Representa una solución posible, que permite proteger la pila mediante el envío de las fuerzas de choque directamente al terreno de cimentación a través de elementos estructurales verticales empotrados o apoyados en el fondo marino. La estabilidad queda confiada bien al propio peso o al

empotramiento en el suelo. Se disponen la coronación de estos elementos de dispositivos de parachoques que suavizan el impacto.

Según Saul y Svenson (18) esta solución es inviable para una profundidad mayor de 70 m.

(d) Redes protectoras con disipación de energía.

Existen diferentes variantes, si bien todas ellas presentan el denominador común de ser boyas ancladas al fondo del mar con amortiguadores interpuestos que permiten absorber la energía cinética del barco.

(e) Redes protectoras con almacenamiento de energía elástica en los cables de anclaje.

Corresponden a un sistema análogo al anterior pero ahora la energía cinética de la embarcación se transforma en elástica de los cables anclados al fondo marino.

(f) Redes protectoras con almacenamiento de energía en el movimiento de la masa de agua del mar.

Propuesto en (17) es similar a los dos últimos grupos de protección que se han citado, si bien ahora se considera que la disipación de la energía cinética del barco se llevará a cabo mediante un mecanismo de péndulo, es decir, transfiriéndola a un movimiento del mar.

Se comprueba que, en la realidad, las defensas de tipo flotante en el caso mas general pueden disipar la energía que procede del movimiento del barco y ser masa utilizando la reserva de deformación plástica, amortiguando

dores, deformación elástica y movimiento del agua, es decir, una combinación de los mecanismos citados anteriormente.

## 1.6 RESUMEN

En el análisis del problema del choque de un barco contra las defensas de las pilas, solo se consideran los dolfinos y las redes protectoras flotantes con los distintos mecanismos de disipación de la energía. En algunos casos se describirán algunos métodos de cálculo específicos de ciertos tipos de defensa, sin embargo, en el procedimiento basado en la dinámica del choque, se planteará el problema con toda generalidad. Por otra parte, una vez efectuado el estudio probabilístico de las acciones de impacto - tamaño, velocidad e incidencia - de la embarcación proyectil, de acuerdo con algunos de los procedimientos reseñados en el apartado 1.2 o similares, con las acciones de diseño obtenidas -o con la muestra representativa que se considera en el caso de una simulación de Montecarlo- se procede al cálculo del choque de un modo determinista. Por lo tanto, en los capítulos que siguen se suponen totalmente especificados los datos del modelo de cálculo del impacto tanto en el barco impactador como el tipo de defensa impactada.

## REFERENCIAS

- (1)- Derucker K.N. "Analysis of Concrete Bridge Piers for Vessel Impact". Civil Engineering for Practicing and Design Engineers. Vol. 1 (1982).
- (2)- Derucker, K.N. y Heins C.P. "The State of Art Bridge Protective Devices" Decker N.Y. (1977).
- (3)- SNED "Symposium d'Ingenierie" Tanger 3-4 Mayo (1982).
- (4)- "Ship collision with bridges and offshore structures" Copenhagen. Junio (1983).
- (5)- Leske, J.A. "Ships and Bridges" en el libro Proceeding 3rd International Conference. "Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering" Sidney Enero 29 - Febrero 2 (1979).
- (6)- Crund, J.E. y Hornyik K. "Hazards from Aircraft" Proceedings of the Institute of Environmental Sciences. Abril (1975).
- (7)- "Civil Engineering and Nuclear Power". Report of the ASCE Committee on Impactive and impulsive Loads. Knoxville, Tennessee, Setiembre (1980).

- (8)- Brennan, J.N. (edit) "Bibliography on Shock and Shock Excited Vibrations". Vols. I y II. Engineering Research Bulletin 69 . Pennsylvania State University (1958).
  
- (9)- Bennit, W. (edit) "Bibliography on Impact". Gen. Elect. Rept. R60SD302 pussile and Space Vehicle Dept. Philadelphia, Pa (1960).
  
- (10)- Goldsmith W. "Impact" Edward Arnold (Publishers) Ltd. Londres (1960).
  
- (11)-Zukas, J.A., Nicholas T., Swift H.F., Greszcuk L.B. y Curran D.R. "Impact Dynamics" John Wiley and Sons. (1982).
  
- (12)- Bracher R.J. y Huston A.E. "High Speedd Radiography of Projectiles" Proc. 12th Congress on High Speed Phtogoraphy (1976).
  
- (13)- Hadland R. "Techniques and Applications of Image Converter Cameras" Proc 13th Int Cong. on High Speed Photography and Photonics (1978).
  
- (14)- Woisin, G. "Die Kollisionversuche der GKSS (Los ensayos de colisión en GKSS). "Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gessellschaft Vol. 70. (1976).
  
- (15)- Brink-Kjaer, O., Brodersen, F.P. y Nielsen, A.H. "Modelling of Ship Collisions agaisnt Protected Structures". IABSE Colloquium Copenhagen (1983).

- (16)- Zukas, J.A. "Impact Dynamics". dentro de la "Aerospace Conference Century 2. Emerging Technology Conferences", San Francisco, California. (1980).
- (17)- Arenas, J.J. "Choques de embarcaciones contra pilas de puentes", dentro del "Coloquio Internacional sobre la factibilidad de una comunicación fija a través del Estrecho de Gibraltar". Madrid. (1982).
- (18)- Saul R. y Svenson H. "Zum Schutz von Brückenpfeilern gegen Schiffsanprall, dargestellt am Beispiel der Brücken Zárate-Brazo Largo über den Paraná". Du Bantechnik. (1981).



## CAPITULO 2.- METODOS EXPERIMENTALES Y APROXIMADOS DE CALCULO DE IMPACTO

### 2.1 METODOS EXPERIMENTALES

El ensayo de materiales y estructuras se hace necesario para un entendimiento básico y un diseño seguro de las estructuras sometidas a impacto. Los resultados de los ensayos de materiales constituyen los datos de entrada de los métodos analíticos actuales por computador. Por otra parte el comportamiento de estructuras complejas deben ser contrastados con los previstos en un cálculo matemático. En el estado actual del Análisis de las Estructuras, no se suele diferenciar entre ambos tipos de ensayos -materiales y estructuras- ya que el clásico de experimentación en probeta corresponde a un tipo muy simple de estructuras. El comportamiento dinámico de los materiales, en fase no elástica, no puede descomponerse en general en simples casos y debe ser tratado de un modo global considerando todos los parámetros que intervienen en el fenómeno. Por consiguiente, es cada mas usual, el ensayo de estructuras y material conjunto dentro de un proceso de análisis denominado identificación estructural, es decir, obtención de los parámetros característicos del material a partir de una minimización del error entre los resultados del cálculo y la experimentación.

Los ensayos de estructuras pueden ser de dos tipos: ensayo en modelo reducido y en gran escala (incluso en escala real). La elección entre ambas es una cuestión de tiempo y dinero. La realización, el manejo y la experimentación de un modelo reducido es generalmente mas barata ya que se utiliza menos material, se precisa menor mano de obra y

el equipo de carga requerido es generalmente de baja potencia. Por otra parte, un modelo reducido puede ser modificado parcialmente con facilidad y por lo tanto, un número mayor de ensayos pueden ser realizados en un menor tiempo.

El objetivo de un ensayo es el mismo que el de una prueba de carga, es decir, conseguir la respuesta a un problema para el que no existe otro procedimiento de cálculo, comprobar el grado de exactitud de un análisis, generar una relación funcional entre los parámetros que intervienen en el fenómeno (fórmulas empíricas) o estudiar el comportamiento fundamental (fenomenológico) de un fenómeno todavía no totalmente entendido.

En la época actual, el interés de la experimentación no se ha debilitado, incluso ante los avances espectaculares alcanzados en la computación mediante ordenadores. A este respecto es interesante la publicación (1).

Los ensayos que se realizan para comprender el fenómeno del impacto deben de ser llevados a cabo e interpretados de acuerdo con las leyes de semejanza, que se comentan más adelante. Una descripción de la instrumentación, tipo de carga, recogida de resultados y restantes aspectos del ensayo se remite a las publicaciones específicas citadas en el capítulo 1.

En primer lugar en los problemas estáticos existen dos dimensiones fundamentales: longitud y masa (o fuerza); en los problemas dinámi

cos el tiempo es la tercera dimensión. Por lo tanto, con objeto de obtener verdaderos modelos semejantes, solo se pueden elegir dos o tres, según sea un problema estático o dinámico, factores de escala independientes:  $\lambda_l$ ,  $\lambda_m$  y  $\lambda_t$ . Los restantes factores de escala se obtienen a partir de las ecuaciones diferenciales que rigen el fenómeno o por consideración del análisis dimensional. Si se estudiaran problemas térmi-  
cos, habría que aumentar a cuatro el número de unidades fundamentales, es decir, añadir la temperatura.

El factor de escala  $\lambda_i$  se define como el cociente entre la cantidad  $i$  del modelo y la magnitud  $i$  del prototipo, es decir, si se consi-  
dera  $i=h$  el canto de una viga, se obtiene:

$$\lambda_i = \frac{\lambda_m}{\lambda_p} \quad (2.1)$$

con los subíndices  $m$  y  $p$  designando la cantidad correspondiente al modelo y prototipo respectivamente.

Un modelo se denomina geométicamente semejante al prototipo si todas sus dimensiones son homotéticas en un mismo factor. Los puntos o instantes correspondientes se denominan homólogos. Se puede suponer normalmente que existe semejanza si una función ( $m$ ) es una proporción constante de una función ( $p$ ) evaluada en puntos e instantes homólogos.

De la anterior definición se observa que la experimentación en modelos reducidos no se restringe a modelos elásticos y lineales. Por otra

parte, la definición establece que el factor de escala debe ser constante a lo largo del ensayo. Esto significa, desde el punto de vista de las ecuaciones constitutivas de los materiales (relaciones tensión-deformación) que el módulo de elasticidad, la tensión de fluencia y la tensión de rotura del material tienen que ser semejantes en el material del modelo y del prototipo, para estados homólogos. Si existe, mas de un material en la estructura se debe obtener la misma proporción para cada material que interviene. Por ejemplo si  $h$  y  $a$ , denotan hormigón y acero, se debe cumplir:

$$\lambda_E = \frac{E_{h,m}}{E_{h,p}} = \frac{E_{a,m}}{E_{a,p}} = \frac{t_{ay,m}}{f_{ay,p}} = \frac{f_{hc,m}}{f_{hc,p}} \quad (2.2)$$

En un modelo verdadero la cantidad adimensional deformación  $\epsilon$  es igual en el prototipo que en el modelo, lo que implica que las deformaciones de fluencia y de fractura deben de ser iguales en el prototipo y en el modelo. A veces, para conseguir una mayor libertad en el diseño de un modelo, se introduce una escala adicional, que implica una distorsión en el proceso. Por ello, las consecuencias deben de ser examinadas cuidadosamente (2).

En general, se comprueba que los requisitos de semejanza suponen identidad en las estructuras de hormigón de la distribución, número y tamaño de las fisuras, entre el prototipo y el modelo. Las tensiones de deslizamiento y anclaje entre armaduras y hormigón deben de estar relacionadas por el mismo factor que en los diagramas  $\sigma-\epsilon$ , de tensión deformación. Análogas consideraciones para materiales metálicos, en sus

características constitutivas. Se comprende que únicamente estructuras en las que estos factores juegan un papel predominante sólo pueden ser analizadas utilizando los materiales reales.

Incluso el factor de escala puede distorsionar los resultados que dependen, como parece ser la rotura por esfuerzo cortante en el hormigón, de la raíz cuadrada del canto y por otra parte el colapso debido al momento flector es función del canto. Si existe una situación de rotura combinación de ambos esfuerzos, se comprende que el valor absoluto de las dimensiones es un parámetro de influencia decisiva.

El tiempo constituye la tercera dimensión fundamental en problemas dinámicos. Si en la elección del material no existieran restricciones el factor de escala temporal podría ser elegido independientemente. Instantes homólogos están interconectados por la velocidad de las ondas en un medio monodimensional y el factor de escala geométrica mediante la expresión:

$$\lambda_t = \frac{t_m}{t_p} = \frac{c_p}{c_m} \cdot \frac{l_m}{l_p} = \lambda_l \sqrt{\frac{E_p}{\rho_p} / \frac{E_m}{\rho_m}} = \lambda_l \sqrt{\lambda_\rho / \lambda_E} \quad (2.3)$$

La escala de tiempos se encuentra entonces definida por los factores de escala de longitudes, densidades y módulos elásticos. Si se trata de problemas de propagación de ondas no elásticas, el valor de E debe ser considerada el módulo de elasticidad tangente, es decir  $\frac{d\sigma}{d\epsilon}$  pendiente de la curva constitutiva del método en el nivel de deformación  $\epsilon$  considerado. Si se trata de un ensayo de una estructura compuesta de va

rios materiales, como el valor de  $\lambda_t$  debe ser constante en el ensayo, la relación (2.3) anterior debe satisfacerse para cada uno de los materiales de la experimentación. Se comprende, una vez más, que probablemente la única forma de conseguir la total satisfacción de las condiciones de semejanza, es la utilización de idénticos materiales en el prototipo y modelo. Incluso en este caso, pueden aparecer influencias de escalas si los materiales presentan propiedades dependientes de la velocidad de deformación, puesto que esta velocidad depende del factor de escala geométrico.

La colisión entre cuerpos elásticos puede experimentarse de acuerdo con las leyes de semejanza resumidas en la tabla 2.1. Si el ensayo no puede efectuarse de acuerdo con estos requisitos o si los resultados se intentan aplicar a otro caso, es posible utilizar fórmulas aproximadas entre los valores del ensayo resultante efectuado y los de uno que correspondiera a un modelo verdadero (satisfaciendo las relaciones de la tabla 2.1). Este modelo verdadero se designa por el subíndice s en las expresiones siguientes, que reflejan la influencia de la velocidad y la masa en la fuerza máxima de la colisión:

Impacto entre dos cuerpos con choque entre sus caras planas:

$$\frac{F_{\max}}{F_{\max,s}} = \frac{v}{v_s} \left( \frac{m}{m_s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

Impacto entre esferas de radio  $r_i$  y módulo de elasticidad  $E_i$ :

$$\frac{F_{\max}}{F_{\max,s}} = \left( \frac{v}{v_s} \right)^{\frac{4}{5}} \left( \frac{m}{m_s} \right)^{\frac{2}{5}} \left( \frac{r}{r_s} \right)^{-\frac{1}{5}} \left( \frac{E}{E_s} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.5)$$

siendo

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}; \quad \delta = \delta_1 + \delta_2$$

con

$$\delta_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$$

En la referencia (3) se presentan factores de corrección similares a los anteriores, referidos a la duración y área de contacto: Debe, sin embargo, tenerse en cuenta que en el caso de ensayos no semejantes las disimilaridades no introduzcan nuevos elementos, respecto al modelo verdadero, que modifiquen la naturaleza del fenómeno que se estudie.

Es posible, si bien utilización en la modelización del impacto de barcos contra pilas de puentes y escasa, la experimentación dinámica del choque mediante las técnicas de fotoelasticidad; ver a estos efectos, las referencias (4) y (5).

Por el contrario la experimentación en modelo reducido del fenómeno del impacto ha sido muy intensa, particularmente en los últimos años. Desde los trabajos pioneros de Minorsky (18) que dedujo una relación empírica sencilla entre la energía absorbida y el volumen de acero dañado en un choque hasta las experimentaciones de Woisin (6) con ensayos a escalas 1:7,5 y 1:12.

Los resultados deducidos de modelos de Woisin (6), Ando y Arita (7), Arita y otros (8), Nagasawa (9) y mas recientemente en 1980 Iwai y otros (10) permitieron entender mejor la relación de curva carga pe

T A B L A 2.1.

CANTIDAD	DIMENSION	MODELO VERDADERO	MODELO VERDADERO con $\lambda_E = 1$ ; $\lambda_\rho = 1$
Dimensiones lineales	L	$\lambda_1$	$\lambda_1$
Movimientos	L	$\lambda_1$	$\lambda_1$
Rotación	-	1	1
Deformación	-	1	1
Area	$L^2$	$\lambda_1^2$	$\lambda_1^2$
Tensión	$FL^{-2}$	$\lambda_E$	1
Módulo de Young	$FL^{-2}$	$\lambda_E$	1
Coefficiente de Poisson	-	1	1
Carga concentrada	F	$\lambda_E \lambda_1^2$	$\lambda_1^2$
Carga cuchillo	$FL^{-1}$	$\lambda_E \lambda_1$	$\lambda_1$
Presión	$FL^{-2}$	$\lambda_E$	1
Momento	FL	$\lambda_E \lambda_1^3$	$\lambda_e^3$
Densidad	$FL^{-4}T^2$	$\lambda_\rho$	1
Tiempo	T	$\lambda_1 \sqrt{\lambda_\rho / \lambda_E}$	$\lambda_1$
Velocidad	$LT^{-1}$	$\sqrt{\lambda_E / \lambda_\rho}$	1
Aceleración	$LT^{-2}$	$\lambda_E / (\lambda_\rho \lambda_1)$	$1/\lambda_1$
Frecuencia	$T^{-1}$	$\sqrt{\lambda_E / \lambda_\rho} / \lambda_1$	$1/\lambda_1$
Velocidad deformación	$T^{-1}$	$\sqrt{\lambda_E / \lambda_\rho} / \lambda_1$	$1/\lambda_1$
Velocidad tensión	$FL^{-2}T^{-1}$	$\lambda_E \sqrt{\lambda_E / (\lambda_1 \lambda_\rho)}$	$1/\lambda_1$



netración y las estructuras del barco. Reckling en (11) y (12) obtuvo una concordancia aceptable de sus resultados con los de los experimentos de Woisin. Una versión de la literatura sobre la experimentación de choques de barcos contra objetos fijos ha sido llevada a cabo por Jones (13).

## 2.2 METODOS EMPIRICOS DE CALCULO

### 2.2.1 Conceptos previos

La energía cinética desarrollada por un buque en el choque contra una pila viene dada por la fórmula:

$$E_B = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 \quad (2.6)$$

en donde

$E_B$  = energía expresada en mt.

$G$  = desplazamiento del buque cargado.

$g$  = aceleración de la gravedad ( $9,8 \text{ m/seg}^2$ ).

$v$  = velocidad del buque en m/seg.

Cuando se produce un impacto el trabajo es repartido y absorbido por:

1. Deformación elástica del buque.
2. Deformación elástica de la estructura (pilas).
3. Deformación de las defensas.

4. Desplazamientos del agua entre el buque y la pila.
5. Balanceo del buque, si el punto de impacto está sobre o por debajo de su centro de gravedad.
6. Absorción de la vibración.

La mayor parte de la energía del impacto se transforma en calor a través de los apartados 1, 2 y 3. En ellos, se incluye, no solo la energía de deformación elástica propiamente dicha, en general pequeña, sino la energía de deformación plástica y debida al trabajo de fricción.

Se puede analizar aproximadamente las consecuencias de un choque mediante la utilización de la mecánica externa del impacto, (6), (14) y (15). Es posible por medio esta teoría obtener la energía del impacto sin el conocimiento de las fuerzas de impacto; al considerar los principios de conservación de la energía, impulso y torsión. El estudio se lleva a cabo, dentro de la teoría elemental del impacto de cuerpos libres, incluyendo en el análisis la influencia del agua circundante y es timando la porción elástica de la energía del impacto.

La influencia del agua se aproxima normalmente a través de una masa suplementaria hidrodinámica. Para la aceleración según la longitud del barco, esta masa se estima constante en el rango de un 5% del movimiento del barco. Su valor depende según (16) de la aceleración del barco y de la duración del impacto, alcanzando valores hasta 1.8 de la masa del buque. Este valor puede incrementarse hasta un 70%, de acuerdo con experiencias alemanas, si se trata de aguas someras.

Si se intentan conocer las fuerzas de impacto, se hace precisa la consideración de la mecánica del impacto denominada interna (17). En esta teoría la fuerza del impacto en el choque del barco depende esencialmente de la deformación producida en los elementos estructurales colisionados.

La fuerza del impacto varía a lo largo del tiempo  $t$  del choque  $P(t)$  y es función de la longitud de daño  $a(t)$  en el barco y en la pila. La relación  $P = f(a)$  depende de las características geométricas, materiales y deformabilidades relativas entre los elementos estructurales involucrados.

#### 2.2.2 Mecánica del impacto

Minorsky (18) ha obtenido una correlación lineal entre el volumen de acero deformado del barco y la energía absorbida en el choque entre dos barcos, que modificadas por Woisin (15) conduce, para el caso de choque en ángulo recto entre dos barcos, uno de ellos en reposo, a la siguiente fórmula:

$$\Delta E = \frac{\mu}{\mu+1} \frac{m_1 v_1^2}{2} \quad (2.7)$$

$$\Delta W = a R + b \quad (2.8)$$

siendo

$\Delta E$  la parte de energía cinética causante del daño que se transforma en  $\Delta W$ .

$\Delta W$  la energía absorbida en el área de daño, es decir:  $\Delta W = \Delta E$ .

$\mu = \frac{m_2}{m_1}$  la relación de masas del barco impactante al impactado. Las masas hidrodinámicas adicionales están contenidas en  $m_1$  y  $m_2$ .

$\frac{1}{2} m v_1^2$  es la energía cinética del barco impactante.

a y b constantes obtenidas por regresión, con los valores siguientes:

$$a = 47 \text{ MN m/m}^3.$$

$$b = 32 \text{ MN m.}$$

R volumen de acero deformado en el área de daño ( $\text{m}^3$ ).

La fórmula de Minorsky ha sido conformada en numerosas colisiones reales y en modelos reducidos.

Entonces se puede tratar el impacto de un barco contra un cuerpo rígido como se indica en (17):

Se supone el barco de masa  $m_1$  con velocidad longitudinal  $v_0$ , únicamente y que choca según un ángulo  $\alpha$  con la pila (figura 2.1). La fricción  $\mu$  entre pila y barco se supone constante durante la colisión.

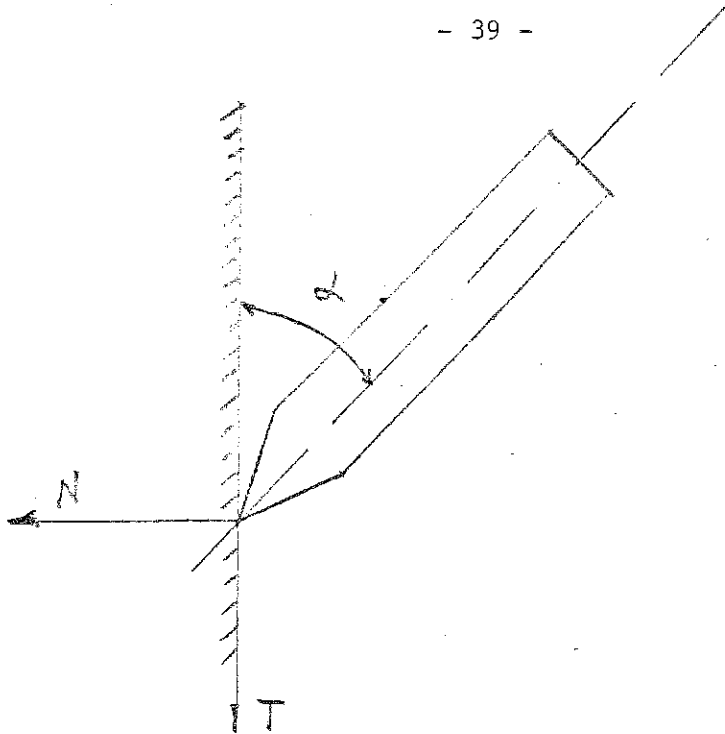


FIGURA 2.1 Geometría durante el impacto.

La energía cinética del barco antes del impacto es:

$$E_k = \frac{1}{2} f m_1^2 v_0^2 \quad (2.9)$$

con  $f = \frac{m_1 + \Delta m}{m_1} \approx 1.05$  es un factor que tiene en cuenta la masa hidrodinámica suplementaria  $\Delta m$ . Esta masa en la dirección transversal, debido a la pequeña duración del impacto introduce un factor de 1.5.

Al plantear las ecuaciones del impacto (impulso = variación de cantidad de movimiento) es decir:

$$I = P dt = d(m v) \quad (2.10)$$

es conveniente introducir la masa reducida  $m_r$  del barco que considera los momentos de rotación y traslación de este en el choque. Se supone sin embargo, que el punto de impacto este situado en el eje longitudinal del barco. La expresión de esta masa reducida es:

$$m_r = 1,5 m_1 \frac{d^2}{d^2 + r^2} \approx 0,3 m_1 \quad (2.11)$$

con  $d$  la distancia del cdg del barco al punto de impacto y  $r$  el radio de giro del barco. La ecuación (2.10) se plantea según los ejes normal  $N$  y tangencial  $T$  de la superficie de la pila en el punto de contacto. Se obtiene, entonces, como incremento de las velocidades longitudinal (1) y transversal ( $q$ ), en función de los impulsos normal  $I_N$  y tangencial  $I_T$ .

$$\begin{aligned} \Delta_N^{v_1} &= \frac{I_N \operatorname{sen} \alpha}{1,05 m_1} ; & \Delta_T^{v_1} &= \frac{I_T \operatorname{sen} \alpha}{1,05 m_1} \\ \Delta_N^{v_q} &= \frac{I_N \operatorname{cos} \alpha}{0,3 m_1} ; & \Delta_T^{v_q} &= \frac{I_T \operatorname{cos} \alpha}{0,3 m_1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

con  $I_T = \mu I_N$

Se supone en lo que sigue que  $\mu \leq \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ , en caso contrario se escribe  $\mu = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ .

Las velocidades del barco quedan disminuidas en los valores:

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= \Delta_N^{v_1} + \Delta_T^{v_1} \\ \Delta v_q &= \Delta_N^{v_q} + \Delta_T^{v_q} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por otra parte la velocidad según  $N$ ,  $v_N'$  después del impacto tiene a ser nula, por lo que se escribe:

$$v_N' = v_0 \operatorname{sen} \alpha - \Delta v_1 \operatorname{sen} \alpha - \Delta v_q \operatorname{cos} \alpha = 0 \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) permite obtener el valor del impulso normal (y tangencial). En efecto:

$$i_N = \frac{I_N}{v_0 m_1 1.05} = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}^2 \alpha + \mu \text{sen} \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \mu \text{sen} \alpha \cos \alpha) \frac{1.05}{0.3}} \quad (2.15)$$

siendo  $i_N$  la dimensión normalizada del impulso normal del impacto  $I_N$ .

La energía cinética, que permanece en el barco después del choque  $E'_k$  es por lo tanto:

$$E'_k = \frac{1}{2} 1.05 m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} 0.3 m_1 v_q'^2 \quad (2.16)$$

con

$$v_1' = v_1 - \Delta v_1 \quad \text{y} \quad v_q' = v_q - \Delta v_q$$

La relación entre ambas energías, antes y después del choque, es:

$$e_k = \frac{E'_k}{E_k} = (1 - i_N \frac{\text{sen} \alpha + \mu \cos \alpha}{1.05})^2 + 0.286 i_N^2 (\frac{\cos \alpha - \mu \text{sen} \alpha}{0.3})^2$$

La energía de colisión, que se transforma, de cinética en otra clase energética es:

$$\Delta E = E_v - E'_k = \eta E_v$$

con  $\eta = 1 - e_k$  (2.17)

En el caso de que  $\mu \geq \frac{1}{\text{tg} \alpha}$  se tiene  $\eta = 1$ .

La figura 2.2 representa el valor de este coeficiente  $\eta$  en función del ángulo de ataque y rozamiento.

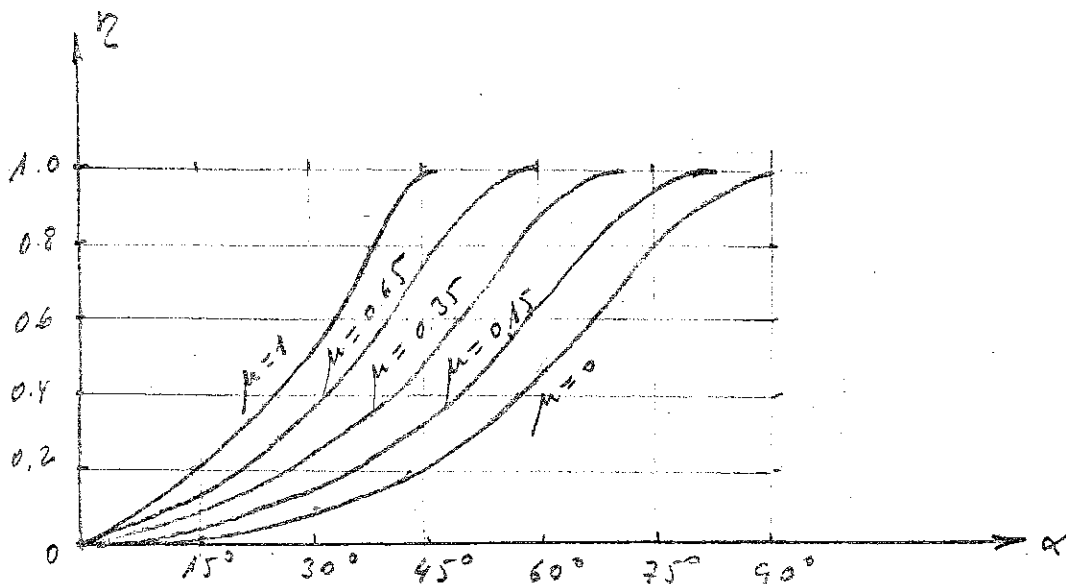


FIGURA 2.2 Relación  $\eta = \frac{\text{energía absorbida en la colisión}}{\text{energía inicial del barco}}$  según Ref. (17)

### 2.2.3 Fuerzas en el choque en ángulo recto contra pila

Constituye un problema complejo de obtención de las fuerzas de reacción, ya que normalmente se conoce el valor de su integral temporal o impulso mediante los procedimientos de la mecánica racional. Es preciso, en este caso recurrir al análisis mas complejo como se comentan en otros capítulos posteriores. Aquí se exponen algunos resultados empíricos obtenidos en el GKSS durante los años 1967-76.

La fuerza media del impacto  $P_m$  se estima mediante la fórmula:

$$P_m = \frac{\Delta E}{a} \quad (2.18)$$

con  $a$  la longitud del daño.



Este valor se mantiene practicamente constante durante el periodo de la colisión (figura 2.3). No obstante, la máxima fuerza del impacto  $P_{\max}$  aparece al comienzo del mismo durante 0,1 a 0,2 segundos y alcanza un valor aproximado del doble de  $P_m$ . La siguiente expresión deducida por Woisin permite calcular en una primera aproximación el valor de  $P_{\max}$ :

$$P_{\max} = 0.88 \sqrt{G} \pm 50\% \quad (2.19)$$

siendo  $P_{\max}$  la fuerza máxima de impacto en MN.

G el tonelaje del barco.

La variación del  $\pm 50\%$  incluye las distintas características del buque, tipo de rigidización interna y el grado de llenado de agua del extremo de la proa entre otras características.

Estimado  $P_{\max}$  a partir de la fórmula (2.19) se deduce  $P_m$ , al tener en cuenta las consideraciones:

$$P_m \approx \frac{1}{2} P_{\max}$$

La longitud de daño se obtiene mediante la expresión (2.18), es decir:

$$a = \frac{\Delta E}{P_m} \quad (2.20)$$

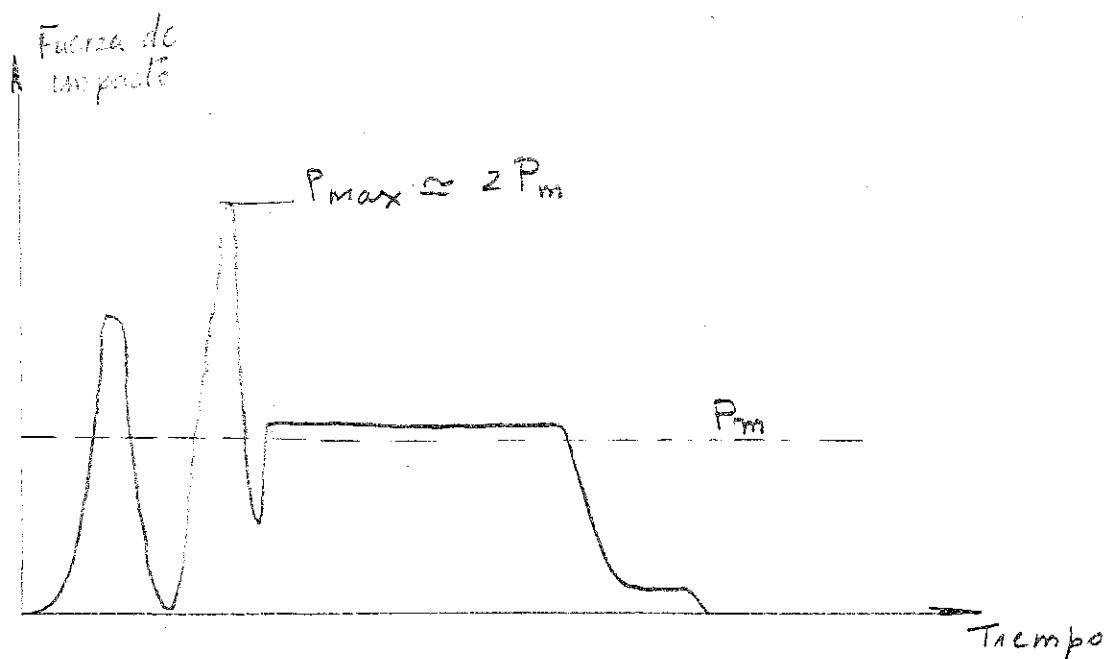


FIGURA 2.3 Fuerzas de impacto deducidas de un ensayo de GKSS. Ref. (19).

## 2.3 MÉTODOS APROXIMADOS DE CÁLCULO DEL IMPACTO

### 2.3.1 Planteamiento del problema

Dada la importancia de la navegación que cruza el Estrecho, se supone en principio, que existen absorbedores de choques alrededor de las pilas, puesto que estas en general serán incapaces de soportar sin grandes movimientos y deformaciones las enormes cargas que se producen.

Con objeto de analizar las características de un sistema absorbedor de choques, se considera el siguiente sistema estructural, simplificando (figura 2.4). Una masa  $m$  (el barco) con una velocidad  $\dot{x}$  que colisiona con la pila (en reposo) representada por el voladizo (sistema estructural 1) y un absorbedor (sistema elástico 2). No se tiene en cuenta por ahora el efecto del agua.

En el proceso del impacto la energía cinética del barco se convierte en energía de deformación  $U$  de los dos sistemas estructurales. Durante un determinado lapso de tiempo  $t_1$  el sistema 1 se deforma hasta alcanzar un máximo, instante para el cual inicia su deformación la pila (sistema 2), de acuerdo con el esquema de la figura 2.5.

Se observa entonces que el sistema 2 no responde al impacto hasta después de transcurrido el tiempo  $t_1$ , cuando la fuerza de inercia del barco se transmite a través del sistema 1 al sistema 2. Por lo - tanto, si la energía de deformación máxima producida hasta el instan- te  $t_1$  se mantiene de un modo permanente en el sistema 1, entonces apenas se transmite energía al sistema 2. (Figura 2.6).

La única forma de conservar permanentemente el máximo de energía de deformación en el sistema 1 consiste en procurar que se produzcan en el mismo deformaciones permanentes o plásticas. Es preciso, por consiguiente, en un análisis realista del impacto y dimensionamiento del sistema protector de absorción, la consideración de los aspectos no lineales del material y en especial, la plasticidad. Por consiguiente desarrollos teóricos basados en el planteamiento del choque como un pro- blema mecánico entre cuerpos rígidos (20) ó bien dinámico estructural dentro de una teoría elástica y lineal (21) presentan un interés funda- mentalmente académico y permiten cualificar la importancia relativa entre las distintas variables que intervienen en el fenómeno del impacto, pero no debieran ser utilizadas en un diseño de una estructura real.

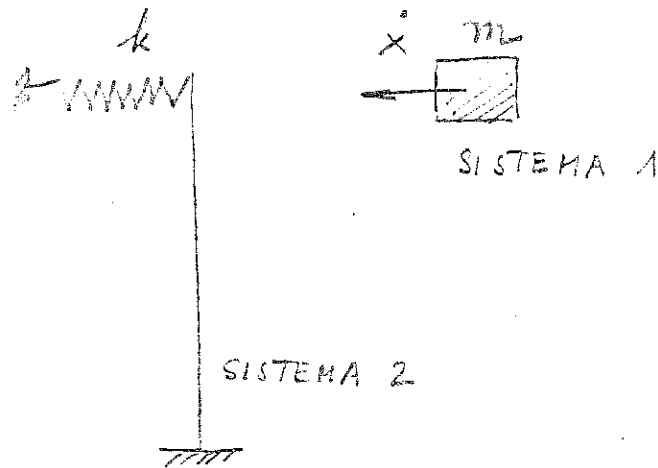


FIGURA 2.4 Idealización simplificada del impacto.

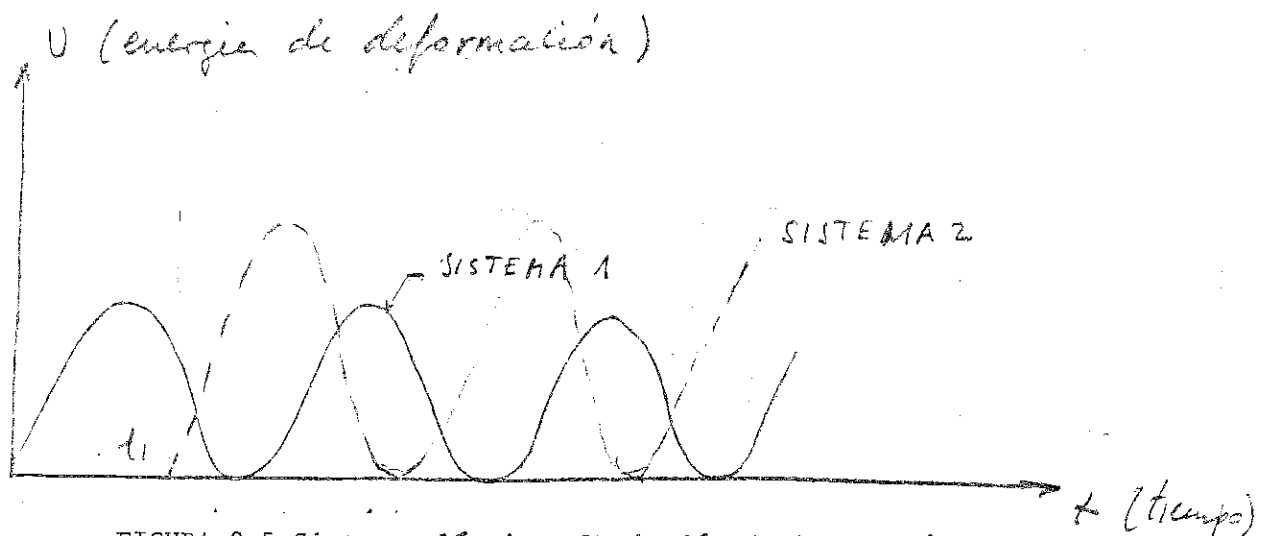


FIGURA 2.5 Sistema elástico. Variación de la energía de deformación.

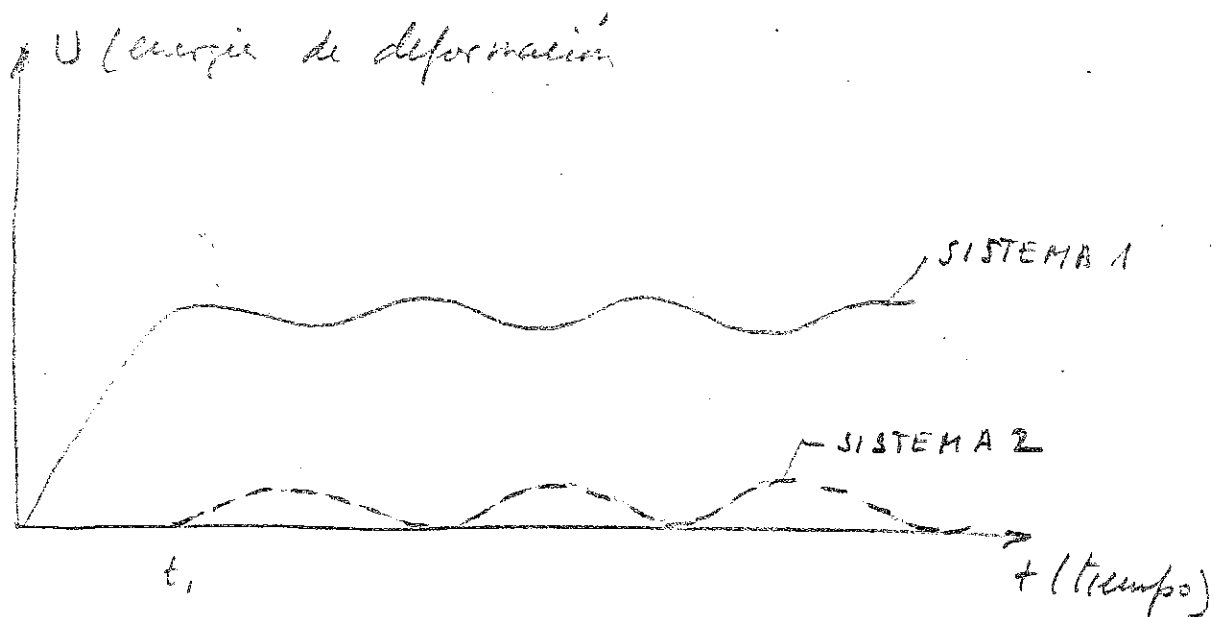


FIGURA 2.6 Sistema plástico. Variación de la energía de deformación.

### 2.3.2 Clasificación de los métodos aproximados

Los métodos aproximados de cálculo del choque de barco contra pila de puente pueden ser agrupados como sigue:

- (a) Métodos basados en la mecánica racional de cuerpos indeformables.  
Teoría clásica del impacto en su formulación simple del impacto central y en su planteamiento mas general de choque oblicuo.
- (b) Métodos que consideran un comportamiento dinámico de las estructuras involucradas lineal y elástica. Se tiene en cuenta en este caso la deformabilidad de los cuerpos que impactan, si bien dentro de un rango elástico y lineal. Los modelos de estructuras con un solo grado de libertad (gdl), un número discreto de gdl o sistemas distribuidos corresponden a un tratamiento de complejidad creciente del problema del impacto dentro de este grupo de métodos.
- (c) Técnicas no lineales, que simplifican bien la geometría (modelos 2-D), las características de los materiales o distintos efectos (terreno, masa hidrodinámica, etc) a partir de una formulación exacta en el sentido de ser coherente con la teoría de la mecánica de los medios continuos.

De cada uno de los grupos de métodos de análisis anteriores se presentan un breve resumen y comentario en los apartados siguientes.

## 2.4 TEORIA PRACTICA DEL IMPACTO. COEFICIENTE DE RESTITUCION

### 2.4.1. Introducción

La forma mas simple de acercarse al análisis del impacto se basa en la consideración de las ecuaciones de equilibrio y de la manifestación, evidenciada empíricamente, de la conservación de la energía. Es posible mediante esta teoría obtener información acerca del cambio neto de velocidad del centro de gravedad de cada cuerpo considerado en el choque, el impulso neto y el proceso de intercambio energético que se producen en el análisis.

En Mecánica racional se denomina choque o colisión al fenómeno físico que tiene lugar cuando entran en contacto dos sólidos de tal forma que al menos uno de ellos experimenta un cambio brusco e instantáneo en la distribución de sus velocidades. Normalmente ello es debido a la aparición de un impulso en el contacto que genera un conjunto de variaciones de la cantidad de movimiento en todos los puntos materiales de cada sólido.

Sean dos sólidos que colisionan de modo que el choque se inicia con un contacto puntual (figura 2.7) en los puntos  $O_1$  y  $O_2$  de los sólidos 1 y 2 respectivamente. Como en el instante de la incidencia la diferencia de velocidades  $\bar{v}_{O_1} - \bar{v}_{O_2}$ , entre esos dos puntos tiene una componente que induce a proseguir la aproximación entre ambos cuerpos, estos comienzan a deformarse en el contacto y la reacción entre ellos aumenta, alcanzando valores muy elevados, tanto mas grandes cuanto ma

yor sea la aproximación entre los cuerpos. Esta primera fase del proceso finaliza cuando la componente normal de la diferencia de velocidades entre  $0_1$  y  $0_2$  se hace cero. A partir de este instante se inicia un proceso de separación en el que la componente normal de la velocidad relativa invierte su sentido por efecto de las reacciones del contacto, y estas adoptan valores paulatinamente menores a medida que aumenta la separación. Cuando el contacto entre los sólidos es puntual las reacciones se hacen nulas.

De esta explicación física del fenómeno de choque se infiere que éste es incompatible con el modelo de sólido indeformable. Sin embargo, como las deformaciones permanentes de los cuerpos (supuestos elásticos) tras el mismo se consideran despreciables, pueden aplicarse los teoremas de cuerpo indeformable haciendo abstracción de lo que sucede realmente durante el choque.

En Mecánica los efectos del choque se resumen en unos impulsos aplicados en cada uno de los puntos de contacto. Evidentemente la magnitud y dirección de estos impulsos no pueden establecerse a priori. Dependen en primer lugar de la naturaleza de los cuerpos. Si estos son perfectamente elásticos, por ejemplo, los impulsos originados por el choque deben ser tales que no alteren la energía total del sistema, ya que el proceso de choque no supone pérdida energética -en efecto, por tratarse de cuerpos elásticos la energía acumulada por los mismos durante la fase de aproximación es devuelta totalmente durante la separación-. También influye el grado de pulimentación de las superficies; cuando las superficies de contacto son rugosas el choque se dice con ro-

zamiento, y sin rozamiento en caso contrario.

Por estas razones los problemas de choque no pueden resolverse mediante la aplicación exclusiva de los teoremas generales de la Mecánica racional y es preciso introducir algun dato adicional que exprese el comportamiento del sistema durante el choque mismo. Generalmente este dato es el coeficiente de Newton o coeficiente de restitución, complementado por las siguientes hipótesis:

- El choque es instantáneo.
- El choque no comporta un desplazamiento del sistema.
- Los impulsos originados por el choque satisfacen la ley tercera de Newton.

En esencia, el método aplica la ecuación vectorial de equilibrio:

Impulso = variación de cantidad de movimiento.

Es decir, entre los instantes  $t$  y  $t+dt$ , se obtiene:

$$\vec{I} = \vec{F} dt = d(m \vec{v}) \quad (2.21)$$

que implica tres ecuaciones escalares.

La nulidad de momentos respecto a un punto  $O$  générico del espacio conduce a las otras tres ecuaciones escalares:

$$\vec{r} \times \vec{I} = d(\vec{r} \times m \vec{v}) \quad (2.22)$$



En algunos casos sencillos las seis ecuaciones anteriores para cada sólido inmerso en el choque pueden reducirse y simplificarse de un modo considerable.

A continuación se estudia la situación mas simple de impacto, siguiendo la referencia (20).

#### 2.4.2 Impacto central

En este caso se produce la colisión de modo que la normal común a la superficie de contacto continúe a los centros de gravedad de los sólidos que chocan. Además únicamente existen componentes de las velocidades a lo largo de dicha normal comun. No existen por lo tanto efectos rotacionales ni de deslizamientos. (Figura 2.7).

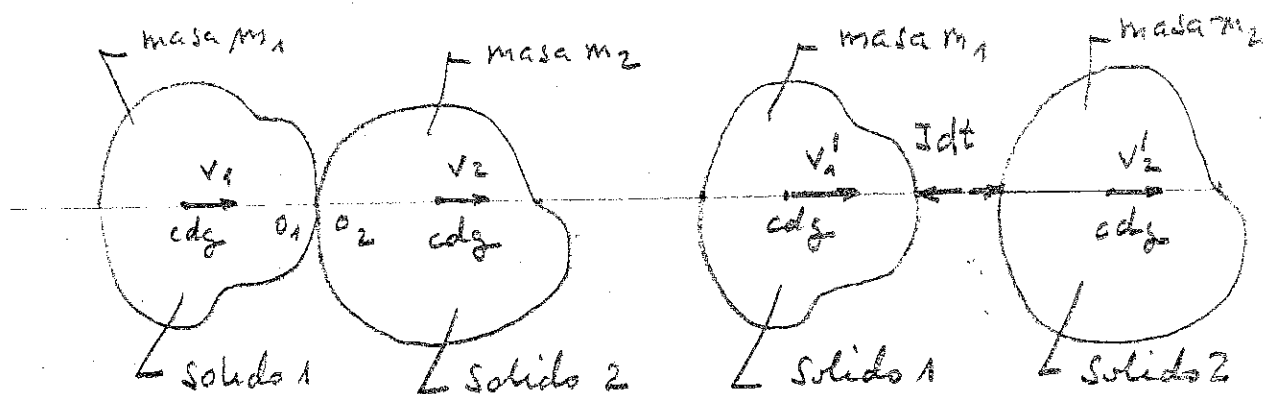


FIGURA 2.7 Representación esquemática del impacto central.

Si  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades de los sólidos 1 y 2 antes del choque y  $v_1'$  y  $v_2'$  las que se producen inmediatamente después, la ecuación - (2.21) aplicada entre esos dos instantes al conjunto de los dos sólidos conduce a la expresión:

$$(m_1 v_1' + m_2 v_2') - (m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0 \quad (2.23)$$

La segunda ecuación, precisa para determinar el impacto, corresponde a una forma de conservación de la energía. La energía cinética total de los cuerpos después del impacto es igual o menor que la energía cinética inicial. Se expresa la posible pérdida de energía cinética mediante el coeficiente de restitución  $e$ , definido como sigue:

$$e = \frac{\text{velocidad relativa entre los sólidos después del choque}}{\text{velocidad relativa entre los sólidos antes del choque}}$$

es decir,

$$e = - \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \quad (2.24)$$

La pérdida de energía cinética es, entonces:

$$\Delta T = T - T' = \frac{1-e^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \quad (2.25)$$

Las ecuaciones (2.23) y (2.24) permiten determinar las velocidades después del choque, obteniéndose las siguientes expresiones adimensionales:

$$\frac{v_1' - v_1}{v_1 - v_2} = - \frac{(1+e)(m_2/m_1)}{1 + m_2/m_1} \quad (2.26)$$

$$\frac{v_2' - v_2}{v_1 - v_2} = \frac{1+e}{1 + m_2/m_1}$$

El impulso neto, que constituye una acción interna, se puede calcular mediante aplicación de la ecuación (2.21) a uno de los cuerpos, obteniéndose el valor:

$$I = Fdt = (1+e) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \quad (2.27)$$

Durante el proceso de impacto la energía cinética de los cuerpos involucrados decrece y por el contrario, la energía de deformación se incrementa. El máximo de la energía de deformación desarrollada por el impacto ocurre en el instante cuando los centros de gravedad tienen la misma velocidad. Esta velocidad común es:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.28)$$

y por consiguiente la energía de deformación máxima posible es:

$$U = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 - \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \quad (2.29)$$

### 2.4.3 Impacto general

En el caso mas general la disposición del movimiento de cada sólido que impacta exige el conocimiento de seis cantidades: las tres -

componentes del vector velocidad de su centro de gravedad y las tres componentes del vector rotación. Es preciso, por lo tanto, disponer de doce ecuaciones para determinar el movimiento resultante.

Seis de las ecuaciones anteriores están constituidas por las de equilibrio de cada uno de los cuerpos. En efecto se elimina el impulso incógnita, compuesto por un vector desconocido pasando por el punto de contacto, al tomar momentos de las cantidades de movimiento en cada cuerpo respecto a dicho punto de contacto. La séptima ecuación corresponde a la condición de que la cantidad de movimiento total del sistema constituido por los dos cuerpos presente proyección nula sobre la normal a la superficie en contacto. La octava ecuación incluye la conservación de la energía o el coeficiente de restitución. Las cuatro restantes ecuaciones consideran condiciones en la superficie del impacto, y cabe distinguir los siguientes casos:

Caso 1.- Si no existe fricción en el contacto entre los sólidos, se disponen de dos ecuaciones para cada uno, correspondientes al equilibrio de la cantidad de movimiento sobre cada plano tangente.

Caso 2.- Si existe total rozamiento, dos ecuaciones se plantean al imponer la no existencia de movimiento relativo entre los dos sólidos en el plano de contacto. Las restantes dos ecuaciones se establecen que el equilibrio de la cantidad de movimiento de todo el sistema permanece invariable en dos direcciones paralelas al plano de contacto (ya que constituyen fuerzas internas).

Caso 3.- Si el rozamiento es intermedio entre las dos caras anteriores entonces, como en el caso 2, la invarianza del equilibrio de la cantidad de movimiento en el plano del impacto sigue siendo válida y proporciona dos ecuaciones. Las restantes ecuaciones resultan de igualar la variación de la cantidad de movimiento de cada cuerpo a lo largo de la dirección de deslizamiento con el impulso de fricción.

La aplicación de lo anterior al caso del impacto de un barco contra una pila o defensa se resume a continuación (figura 2.8):

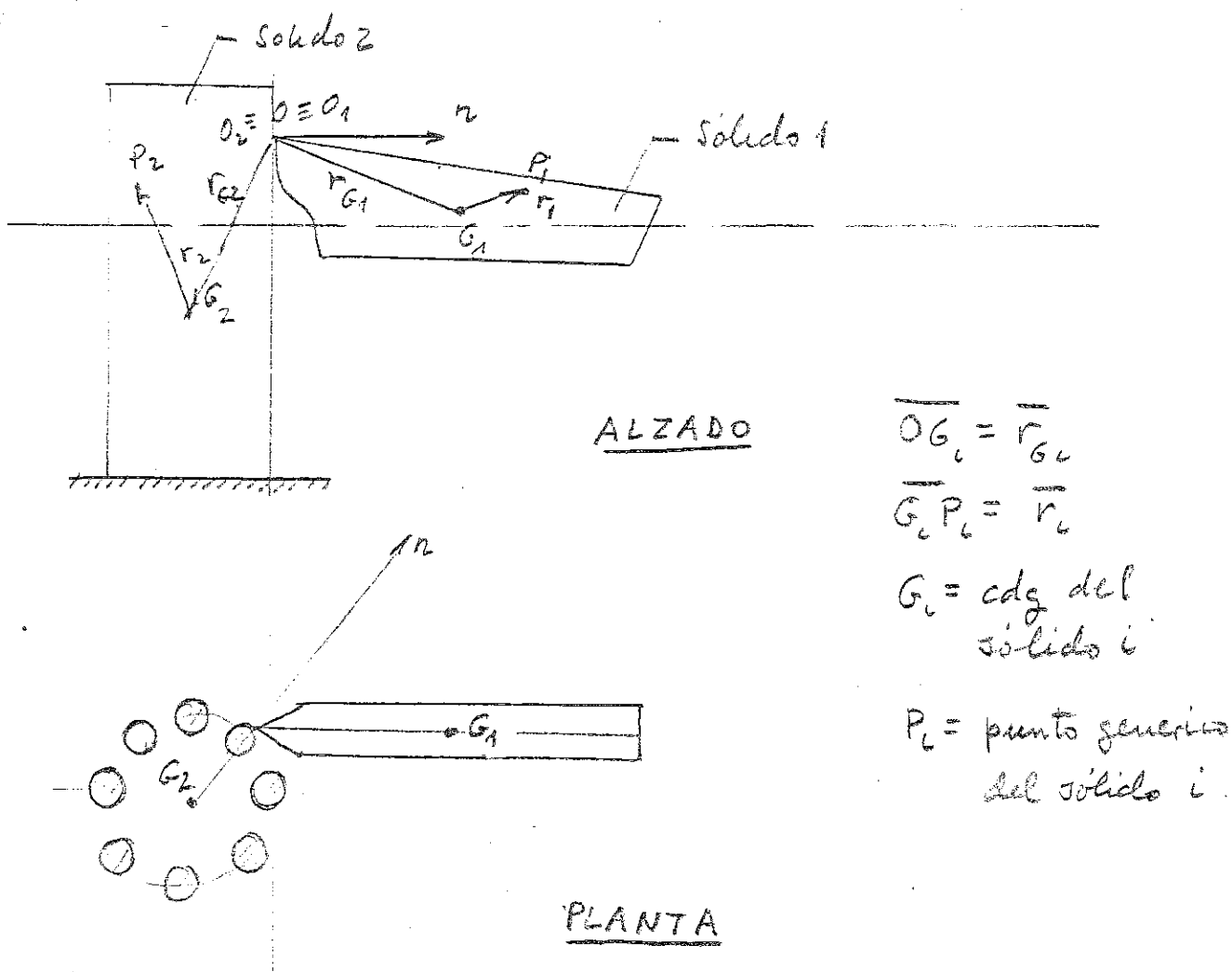


FIGURA 2.8 Impacto de dos sólidos rígidos.

La velocidad de un punto  $p_{1i}$  del sólido 1 (barco) es antes del choque:

$$\bar{v}_{1i} = \bar{v}_{G1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{1i} \quad (2.30)$$

y después del impacto:

$$\bar{v}'_{1i} = \bar{v}_{G1}^1 + \bar{\omega}_1^1 \times \bar{r}_{1i} \quad (2.31)$$

Por lo tanto, se tiene al considerar la ecuación (2.21) aplicada a todos los puntos del barco y tomar momentos respecto al punto 0 de contacto:

$$\sum_i (\bar{r}_{1i} + \bar{r}_{G1}) \times m_i \bar{v}_{1i} = \sum_i (\bar{r}_{1i} + \bar{r}_{G1}) \times m_i \bar{v}'_{1i} \quad (2.32)$$

que proporciona tres ecuaciones escalares.

Analogamente para la pila (sólido 2) se deduce:

$$\sum_i (\bar{r}_{2i} + \bar{r}_{G2}) \times m_i \bar{v}_{2i} = \sum_i (\bar{r}_{2i} + \bar{r}_{G2}) \times m_i \bar{v}'_{2i} \quad (2.33)$$

Evidentemente el caso de la pila, la situación inicial supone que  $\bar{v}_{G2} = 0$  y  $\bar{\omega}_2 = 0$ . Si esta se supone infinitamente rígida las velocidades después del choque son, asimismo nulas.

Conviene tener en cuenta, que las masas  $m_i$  del barco y defensa deben ser incrementadas en la masa hidrodinámica, que puede ser estimada en una primera aproximación mediante procedimientos empíricos. Ya se insistirá mas adelante sobre este tema.

La séptima ecuación escalar corresponde a la nulidad de momentos de la cantidad de movimiento respecto a la recta normal común  $\bar{n}$  a la superficie de contacto, es decir, a la ecuación:

$$\sum_i \bar{n} (m_i \bar{v}'_{1i} - m_i \bar{v}_{1i}) = - \sum_i \bar{n} (m_i \bar{v}'_{2i} - m_i \bar{v}_{2i}) \quad (2.34)$$

La siguiente ecuación escalar se obtiene a partir de la disposición del coeficiente de restitución, considerado como una medida de la pérdida de energía cinética que se produce después del choque. Se puede escribir, por lo tanto, la siguiente ecuación:

$$U'_1 + U'_2 - (U_1 + U_2) = \psi(e) (U_1 + U_2) \quad (2.35)$$

siendo  $\psi(e)$  una función conocida del coeficiente de restitución:

$$U'_j = \frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{v}'_{ji} \cdot \bar{v}'_{ji} \quad (j = 1, 2)$$

$$U_j = \frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{v}_{ji} \cdot \bar{v}_{ji} \quad (j = 1, 2)$$

Si no existe rozamiento, las componentes tangenciales del impulso son nulas y resultan las ecuaciones según dos direcciones  $\bar{e}_1$  y  $\bar{e}_2$  en el plano tangente común a los dos cuerpos en el punto de contacto;

con lo que resultan las cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{t}_1 (m_i \bar{v}'_{ji} - m_j \bar{v}_{ji}) &= 0 & (j = 1, 2) \\ \sum_i \bar{t}_2 (m_i \bar{v}'_{ji} - m_j \bar{v}_{ji}) &= 0 & (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si existe rozamiento perfecto, con lo que no aparece ningún deslizamiento, se cumplen las ecuaciones siguientes, que representan el equilibrio de la cantidad de movimiento del sistema según las direcciones  $\bar{t}_1$  y  $\bar{t}_2$ :

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{t}_1 (m_i \bar{v}'_{1i} - m_i \bar{v}_{1i}) &= -\sum_i \bar{t}_1 (m_1 \bar{v}'_{21} - m_i \bar{v}_{2i}) \\ \sum_i \bar{t}_2 (m_i \bar{v}'_{1i} - m_i \bar{v}_{1i}) &= -\sum_i \bar{t}_2 (m_i \bar{v}'_{2i} - m_i \bar{v}_{2i}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Al no existir deslizamiento se satisface para el punto de contacto 0, que el movimiento relativo es nulo, es decir:

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 (v_{20} - v_{10}) &= t_1 (v'_{20} - v'_{10}) \\ \bar{t}_2 (v_{20} - v_{10}) &= t_2 (v'_{20} - v'_{10}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\text{con } \bar{v}_{j0} = \bar{v}_{Gj} + \bar{\omega}_j \times \bar{r}_{Gj} \quad (j = 1, 2)$$

$$\bar{v}'_{j0} = v'_{Gj} + \bar{\omega}'_j \times \bar{r}_{Gj} \quad (j = 1, 2)$$



Por último, si el rozamiento es intermedio entre los dos casos extremos anteriores, las cuatro ecuaciones de equilibrio son por una parte, las dos expresadas anteriormente en (2.37) y las dos siguientes:

$$\sum_i \bar{t}_1 (m_i \bar{v}'_{1i} - m_i \bar{v}_{1i}) = f_1 \sum_i \bar{n} (m_i \bar{v}'_{1i} - m_i \bar{v}_{1i}) \quad (2.39)$$

$$\sum_i \bar{t}_2 (m_i \bar{v}'_{2i} - m_i \bar{v}_{2i}) = f_2 \sum_i \bar{n} (m_i \bar{v}'_{2i} - m_i \bar{v}_{2i})$$

con  $f_1$  y  $f_2$  "coeficientes dinámicos" de rozamiento en las direcciones  $\bar{t}_1$  y  $\bar{t}_2$ .

Estos "coeficientes dinámicos de rozamiento" son de difícil evaluación y en principio satisfacen las condiciones:

$$0 < f_i < \mu_i$$

siendo  $\mu_i$  el correspondiente coeficiente estático de rozamiento. Por ello se han sugerido hipótesis plausibles para un tratamiento adecuado de esta situación como corresponde a los Darboux y los de la teoría energética del choque con rozamiento de Beglin y Boulanger. No se exponen aquí, pero detalles pueden verse en la referencia (32).

Las doce ecuaciones de equilibrio representadas por las expresiones (2.32), (2.33), (2.34) y (2.35) por una parte y por (2.36) en el caso de rozamiento nulo, (2.37) y (2.38) si el rozamiento es total o perfecto y (2.37) y (2.39) en situaciones intermedias, permiten definir movimientos después del impacto en cada sólido mediante los vectores

$\bar{v}'_{Gj}$  y  $\omega'_j$  ( $j = 1, 2$ ).

#### 2.4.4 El coeficiente de restitución

El coeficiente de restitución constituye un parámetro fundamental en el estudio clásico del impacto entre sólido. No representa una propiedad básica del material. Su magnitud depende de la geometría de los cuerpos que impactan, de las tensiones punta que se produce y la duración del contacto así como de las propiedades básicas de los materiales involucrados (módulo de elasticidad  $E$ , densidad  $\rho$  y límite elástico  $\sigma_F$ ).

En el caso de choque general el coeficiente de restitución se suele definir como sigue (figura 2.8):

Sea  $\bar{v}_{10}$  y  $\bar{v}_{20}$  las velocidades respectivas de los puntos  $O_1$  y  $O_2$  de los sólidos 1 y 2 antes del choque y  $\bar{v}'_{10}$  y  $\bar{v}'_{20}$  después. Si  $\bar{n}$  es la normal común a ambas superficies -entrante hacia 2- se observa que la condición de choque exige:

$$(\bar{v}_{10} - \bar{v}_{20}) \bar{n} > 0$$

si se satisface esta igualdad, el coeficiente de restitución se establece mediante la expresión:

$$e = - \frac{(\bar{v}_{10} - \bar{v}_{20})n}{(\bar{v}'_{10} - \bar{v}'_{20})n} \quad (2.40)$$

Según el valor de  $e$ , el choque recibe el nombre de plástico ( $e=0$ ), inelástico ( $0 < e < 1$ ) y elástico ( $e=1$ ).

En la práctica es mas conveniente considerar el coeficiente de restitución como función de la pérdida de energía.

El incremento de energía cinética del sistema es suma del alcanzado para cada uno de los cuerpos, es decir:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{1}{2}(\bar{v}_{10} - \bar{v}_{20})\bar{I} + \frac{1}{2}(\bar{v}_{20}^1 - \bar{v}_{20})\bar{I}$$

en donde el vector impulso  $\bar{I}$  es colineal con la normal  $\bar{n}$  común, por lo que considerando la expresión (2.40) se obtiene:

$$\Delta T = \frac{1}{2}(1 - e)(\bar{v}_{10} - \bar{v}_{20})\bar{I} \quad (2.41)$$

En muchas ocasiones conviene expresar el incremento de energía cinética del sistema en función de la energía cinética de las velocidades perdidas. Recibe este nombre la energía cinética que tendría el sistema en cada uno de sus puntos si estuviera animado de la velocidad perdida  $W_i$ , diverencia entre la velocidad antes y después de la colisión.

Si  $T_{w_1}$  representa la energía cinética de las velocidades perdidas del sólido 1, se deduce:

$$\begin{aligned} T_{w_1} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i w_{1i}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_{1i} - v'_{1i})(\bar{v}_{1i} - \bar{v}'_{1i}) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} I_1 (\bar{v}_{1i} - v'_{1i}) = \frac{1}{2}(\bar{v}_{10} - v'_{10})\bar{I} \end{aligned}$$

Analogamente para el sólido 2.

$$T_{w_2} = \frac{1}{2}(\bar{v}_{20} - \bar{v}'_{20})(-\bar{I})$$

con lo que la energía cinética de las velocidades perdidas del sistema será:

$$T_w = T_{w_1} + T_{w_2} = -\frac{1}{2}(1+\epsilon)(\bar{v}_{10} - \bar{v}_{20})I$$

Con este resultado se concluye que el incremento de energía cinética del sistema dado por (2.41) puede escribirse como sigue:

$$-\Delta T = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} T_w \quad (2.42)$$

ecuación que manifiesta que en todo choque existe una pérdida de energía cinética del sistema excepto en el choque elástico en el que  $\Delta T = 0$  pues  $\epsilon = 1$ . Por el contrario la máxima pérdida de energía cinética se produce en el choque perfectamente plástico ( $\epsilon = 0$ ) y su valor es:

$$-\Delta T = T_w$$

expresión que coincide evidentemente con el Teorema de Carnot.

El examen de los anteriores resultados sugiere la siguiente interpretación de la transferencia energética en el impacto.

Cuando dos cuerpos colisionan se produce una transformación de energía cinética en energía de deformación. Una parte de la energía cinética original se convierte en energía de deformación en los cuer

pos en el impacto. Subsiguientemente parte de esta energía se devuelve en forma de energía cinética de los sólidos. El resto de la energía es atrapada dentro de cada uno bajo excitación de los modos propios de vibración o bien se disipa como energía plástica de deformación. Puesto que la velocidad de los cuerpos que se deforman no puede ser descrita en función de un único valor, el coeficiente de restitución se expresará en general en función de las velocidades de los centros de gravedad de los cuerpos o bien de una velocidad media promedio a partir de la cantidad del movimiento de cada uno de ellos, es decir:

$$\bar{v}_{jm} = \frac{\sum_i m_i v_{ji}}{\sum_i m_i} \quad (j = 1, 2) \quad (2.43)$$

Esta expresión, si el sistema es distribuido de medida se transforma en la siguiente:

$$\bar{v}_{jm} = \frac{\int_X dm_x \cdot \bar{v}_{jx}}{\int_X dm_x} \quad (2.44)$$

con  $dm_x = \rho_x dv$

$$dv = ||dx||$$

$\bar{v}_{jx}$  = velocidad en el punto  $\bar{x}$  del sólido  $j$ .

$\rho_x$  = densidad en el punto  $\bar{x}$  del sólido  $j$ .

Los parámetros que controlan la magnitud del coeficiente de restitución son fundamentalmente dos. El primero corresponde al volumen de material deformado plásticamente y el segundo a la relación,  $t_i/T$ ,

entre la duración del impacto y el periodo propio de los cuerpos que impactan. Un valor menor de este segundo parámetro implica que los modos de vibración atrapan una proporción cada vez mayor de la energía generada por el impacto.

La determinación del coeficiente de restitución constituye un problema complejo y que precisa, en realidad, el análisis del impacto mediante la teoría de la mecánica de los medios continuos. Existen alternativas para su cálculo de forma simplificada mediante los métodos de Hertz en ciertas situaciones especiales, por ejemplo, la de choque de una masa ligera y compacta contra un sistema macizo distribuido (viga, placa, etc). En estas situaciones, la energía cinética inicial es absorbida fundamentalmente por el viaje de las ondas de tensión en el cuerpo macizo y no se precisa la determinación exacta de las características relacionadas con la fuerza de impacto-tiempo.

## 2.5 IMPACTO ENTRE ESTRUCTURAS ELASTICAS

### 2.5.1 Generalidades

Los métodos clásicos de análisis del choque, que se acaban de resumir, no permiten obtener información sobre las reacciones y tensiones transitorias así como de las aceleraciones que se producen en los cuerpos que impactan y no produce resultados acerca de la duración del impacto. Por ello se hace preciso, si se desea obtener esta información, plantear ecuaciones mas básicas del movimiento. Sin mebargo, la comple

tividad que resulta hace a veces aconsejable introducir aproximaciones que permitan tratar el problema de un modo razonable.

El tipo de simplificación mas simple y primero corresponde a la hipótesis de suponer que las tensiones se transmiten instantáneamente a todos los puntos del sistema. Esta aproximación quasi-estática es razonablemente válida para sistemas con un grado de libertad, para los cuales la duración del impacto es grande en comparación con el tiempo requerido por las ondas de tensión en propagarse a través del cuerpo.

Problemas que pueden resolverse de esta forma son entre otros, la colisión de cuerpos para los que la contribución principal a la flexibilidad aparece en la proximidad del punto de impacto y la contribución mas importante a la inercia se encuentra suficientemente distante de este punto de impacto. Este criterio se satisface por cuerpos compactos con superficies curvas cerca de la región del choque y con geometrías complejas, en las que debido a su forma o material, la principal fuente de flexibilidad se localiza en la vecindad del punto de impacto. Para estos cuerpos es posible, por lo tanto, representar una región con flexibilidad finita y masa despreciable y otra infinitamente rígida y toda la masa concentrada. Estos métodos se describen en el apartado 2.5.2.

Una teoría mas exacta corresponde a incluir en el análisis los efectos de elasticidad e inercia, con lo que surge de un modo natural el concepto de velocidad finita de propagación de ondas de tensión. La consideración de estos efectos es necesaria cuando las fuerzas o ten-

siones varían tan rápidamente durante el tiempo de propagación de estas señales que se producen substanciales desviaciones del equilibrio quasi estático. Problemas típicos que precisan la utilización de este refinamiento corresponde a estructuras largas, como vigas, placas, etc. Un resumen de esta metodología se presenta en un apartado posterior.

Por último, las situaciones intermedias entre los dos extremos que se acaban de comentar pueden ser simuladas adecuadamente mediante sistemas dinámicos con un número finito de grados de libertad. Actualmente es posible representar de este modo cuerpos con geometría no uniforme y con material de características no lineales. El cálculo de estos casos exige la utilización de un computador. En el apartado 2.5.3 se comentará esta técnica de análisis, que sirve de introducción, a los potentes procedimientos basados en elementos finitos o diferencias finitas que serán expuestos en subsiguientes capítulos.

#### 2.5.2 Procedimiento quasi-estático del análisis del impacto central

El ámbito de aplicación del método que se describe en este apartado corresponde a choque entre cuerpos que satisfacen los criterios siguientes:

- (a) El periodo o duración del impacto es relativamente largo en comparación con los periodos fundamentales de los cuerpos involucrados en el choque.
- (b) La relación tensión-deformación es independiente de la velocidad de deformación. Esta situación aparece si las tensiones que se producen en el impacto son inferiores al límite elástico.

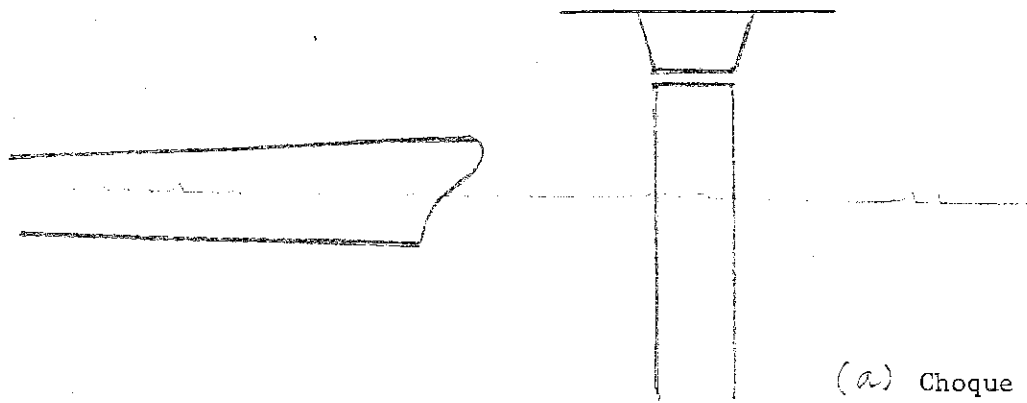


- (c) Las fuerzas que se producen en el punto de impacto pueden definirse en términos de un grado de libertad.
- (d) El movimiento antes y después del choque puede ser adecuadamente determinado a partir del conocimiento del movimiento (traslación y giro) del centro de gravedad de cada cuerpo.
- (e) Durante el impacto, los cuerpos se deforman esencialmente como si deformase estáticamente por la aplicación lenta de fuerzas comparables entre los centros de gravedad de los cuerpos que impactan.

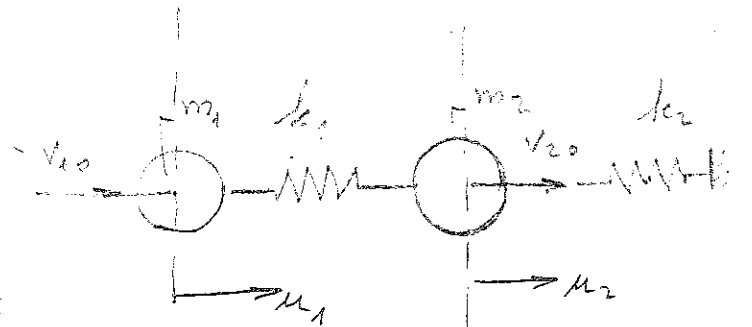
En el caso más simple de este tipo de modelo corresponde al representado en la figura 2.9, en el que existen dos restricciones adicionales a las anteriores:

- 1.- Los centros de gravedad de los cuerpos y el punto de contacto están en línea recta.
- 2.- Los centros de los radios de curvatura de las dos superficies en contacto se encuentra asimismo en la recta anterior.

Con estas condiciones se asegura que la colisión entre los dos cuerpos es central y no aparecen deslizamiento (con o sin fricción) y efectos rotacionales en el punto de contacto.



(a) Choque de barco (1) contra pila de puente (2)



(b) Modelo estructural

$m_i$  masa efectiva del cuerpo  $i$

$k_i$  rigidez del resorte sin masa

$u_i$  movimiento horizontal desde la posición de equilibrio del cdg del cuerpo  $i$

FIGURA 2.9 Choque horizontal

Se supone primeramente a efectos de una simplificación en el análisis que los resortes son elásticos y que  $k_2 = 0$ .

Las ecuaciones del movimiento de cada cuerpo suponiendo que no existen acciones externas, son:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 &= -k_1(u_1 - u_2) \\ m_2 \ddot{u}_2 &= k_1(u_1 - u_2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

o bien por diferencias de las dos ecuaciones anteriores:

$$\ddot{\lambda} = - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} k_1 \lambda \quad (2.46)$$

con  $\lambda = u_1 - u_2$

La solución de la ecuación (2.46) es:

$$\lambda = \lambda_0 \operatorname{sen}\left\{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} k_1\right)^{\frac{1}{2}}(t - t_0)\right\}$$

El valor máximo de la fuerza de choque es:

$$F_{\max} = (v_{10} - v_{20}) \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} k_1\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.47)$$

y la máxima duración del impacto:

$$t_{\max} = \pi \left\{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{k_1}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.48)$$

En el caso de suponer la masa de pila muy grande y con gran rigidez resulta:

$$F_{\max} = v_{20} (m_2 k_1)^{\frac{1}{2}} \quad (2.47a)$$

$$t_{\max} = \pi \left(\frac{m_2}{k_1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.48a)$$

Si la rigidez del resorte no es lineal, es decir, una función genérica del tipo:

$$F = k(u_1 - u_2) = k(\lambda)$$

se obtiene:

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = (v_{10} - v_{20})^2 - 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \int_0^\lambda k(\lambda) d\lambda$$

Por ejemplo, si la relación de elasticidad del muelle se incluye dentro de la forma general:

$$k_1(\lambda) = k_{10} \lambda^n \quad (2.49)$$

con  $k_{10}$  y  $n$  constantes, se obtiene:

$$F_{\max} = \left\{ \frac{(v_{10} - v_{20})^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (n+1) k_{10}^{\frac{1}{n}} \right\}^{\frac{n}{n+1}} \quad (2.50)$$

$$t_{\max} = \frac{2\lambda_{\max}}{(v_{10} - v_{20})} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z^{n+1})^{\frac{1}{2}}} \quad (2.51)$$

con  $\lambda_{\max}$  el acercamiento máximo dado por la expresión:

$$\lambda_{\max} = \left\{ \frac{n+1}{k_{10}} \frac{(v_{10} - v_{20})^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right\}^{\frac{1}{n+1}}$$

Un caso particular incluido en esta formulación corresponde al impacto de dos cuerpos con radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$ . Los valores deducidos por Hertz en su solución clásica del contacto entre esferas permite expresar para la relación (2.49):

$$k_{10} = \frac{4}{3} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{\frac{1}{2}} / \left( \frac{1-v_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-v_2^2}{\pi E_2} \right)$$

$$n = \frac{3}{2}$$

Sin embargo, los resultados deducidos mediante la aplicación de las fórmulas (2.50) y (2.51) no se ajustan con los resultados experimentales. La solución de Hertz sólo considera deformaciones elásticas e implica la serie de restricciones ya comentadas. Otro caso importante de rigidez del muelle no lineal corresponde a la situación de elasto-plasticidad; es decir, la aparición de un tramo horizontal (fuerza constante) al alcanzar un nivel de penetración determinado. En la situación elástica  $F = k_1 \lambda$ , el coeficiente de restitución es:

$$e = - \frac{F_{\max}}{(v_{10} - v_{20})} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{1}{k_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En las situaciones de  $e > 1$  indica que aparece una deformación plástica y de ahí en el caso general, la duración del impacto es:

$$t_{\max} = \frac{\lambda_0}{F_{\max}} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left\{ 1 - \frac{F_{\max} \mu}{k \lambda_0} + \frac{\pi}{2\mu} + \frac{1}{\mu} \sin^{-1} \frac{F_{\max}}{k_1 \lambda_0} \right\}$$

siendo

$$\lambda_0 = v_{10} - v_{20}$$

$$\mu = \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)^{\frac{1}{2}} k_1$$

Si el tramo elástico es despreciable la expresión anterior se simplifica en la forma siguiente:

$$t_{\max} = \frac{\lambda_0}{F_{\max}} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

### 2.5.3 Sistemas con un grado finito de grados de libertad

Entre los sistemas de un solo grado de libertad (gdl) que se acaban de resolver en el apartado 2.5.2 y los sistemas continuos con un número infinito de gdl existe una importante clase de problemas asociados con un número finito de grados de libertad mayor de uno. Constituye este modelo en muchos casos una aproximación práctica y razonable.

A continuación se estudia las consecuencias del choque en el instante  $t=0$ , producido por un barco (proyectil designado con el subíndice 1) con velocidad  $v_{10}$  contra una estructura elástica (defensa de la pila denotada por el subíndice 2) que se encuentra en reposo estático, posición a partir de la cual se definen los movimientos dinámicos  $\underline{u}_2 = (u_{21}, \dots, u_{2N})^T$ .

Se supone la estructura con  $N$  grados de libertad y  $u_{2i}$  representa el movimiento del gdl  $i$ . La masa, el amortiguamiento y la rigidez de la estructura se definen respectivamente mediante las matrices de dimensión  $(N \times N)$   $\underline{m}_2$ ,  $\underline{c}_2$  y  $\underline{k}_2$ , siendo:

$$\underline{m}_2 = (m_{2ij}) \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}\underline{c}_2 &= (c_{2ij}) \\ \underline{k}_2 &= (k_{2ij})\end{aligned}\tag{2.52}$$

La determinación de las matrices  $\underline{m}_2$  y  $\underline{k}_2$  es típica en el cálculo dinámico de estructuras. Existen varios procedimientos como concentración de masas, funciones de forma y elementos finitos, totalmente adecuados para obtener las expresiones de los distintos coeficientes. La matriz  $\underline{c}_2$  se suele deducir mediante consideraciones sobre la proporción del amortiguamiento crítico existentes en cada uno de los modos naturales de vibración de la estructura completa. Mas adelante se insistirá sobre este tema.

La figura 2.9b ilustra el modelo de análisis que se considera, interpretando la masa  $\underline{m}_2$  y la rigidez  $\underline{k}_2$  de la pila como matrices de un sistema de N grados de libertad, en lugar de uno solo, como se esquematiza en dicha figura. Se supone asimismo que el vector velocidad de la pila es  $\underline{v}_{20} = \underline{0}$ . Se considera una estructura única obtenida uniendo el proyectil (gdl 0)<sup>(1)</sup> a un nudo  $j$  ( $1 \leq j \leq N$ ) de la estructura de la pila, mediante un resorte de rigidez  $k_1$ . Esta estructura única presenta (N+1) gdl, correspondientes a los N gdl de la pila y el gdl del barco.

La ecuación del movimiento del conjunto barco-pila es:

$$\underline{m} \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \dot{\underline{u}} + \underline{k} \underline{u} = \underline{0}\tag{2.53}$$

---

NOTA (1): La extensión de este método, a situaciones de choques oblicuos introduciendo un máximo de 6 gdl en el proyectil (sólido rígido) que se conectan mediante sendos resortes a los gdl de la estructura, es directa y no presenta dificultades adicionales.

siendo  $\underline{u} = (\underline{u}_2, \underline{u}_1)$

$$\dot{\underline{u}} = \frac{d\underline{u}}{dt}; \quad \ddot{\underline{u}} = \frac{d^2\underline{u}}{dt^2}$$

$\underline{m}$ ,  $\underline{c}$  y  $\underline{k}$  son las matrices de masa, amortiguamiento viscoso y rigidez de la estructura conjunta, cuyos elementos son:

$$m_{\alpha\beta} = m_{2\alpha\beta} + m_1 \delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^j \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N)$$

$$m_{N+1, \beta} = 0; \quad m_{\alpha, N+1} = 0$$

$$m_{N+1, N+1} = m_1$$

$$c_{\alpha\beta} = c_{2\alpha\beta} + c_1 \delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^j$$

$$c_{N+1, \beta} = -c_1 \delta_{\beta}^{N+1}; \quad c_{\alpha, N+1} = -c_1 \delta_{\alpha}^{N+1}$$

$$c_{N+1, N+1} = c_1$$

$$k_{\alpha\beta} = k_{2\alpha\beta} + k_1 \delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^j$$

$$k_{N+1, \beta} = -k_1 \delta_{\beta}^{N+1}; \quad k_{\alpha, N+1} = -k_1 \delta_{\alpha}^{N+1}$$

$$k_{N+1, N+1} = k_1$$

con  $\delta_{\alpha}^{\beta}$  la delta de Kronecker  $\delta_{\alpha}^{\alpha} = 1$ , y  $\delta_{\alpha}^{\beta} = 0$  para  $\alpha \neq \beta$ .



Las condiciones iniciales de la ecuación (2.53) del movimiento son (para  $t = 0$ ):

$$\underline{u}_0 = 0$$

$$\dot{\underline{u}}_0 = (\underline{v}_{20}, \underline{v}_{10}) \quad \text{con } \underline{v}_{20} = 0 \quad (2.54)$$

La resolución de este problema dinámico sigue pautas bien conocidas (23).

(a) Obtención de frecuencias y modos fundamentales de vibración de la estructura no amortiguada, es decir, de la resolución del problema de autovalores y autovectores:

$$(\underline{k} - \omega^2 \underline{m}) \underline{\phi} = 0 \quad (2.55)$$

resulta la serie de pulsaciones fundamentales:

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_{N+1}^2$$

y los modos de vibración:

$$\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \dots, \underline{\phi}_{N+1}$$

tales que satisfacen las condiciones de normalidad siguientes:

$$\underline{\phi}_\alpha^T \underline{m} \underline{\phi}_\beta = m_\alpha^* \delta_\alpha^\beta$$

$$\underline{\phi}_\alpha^T \underline{k} \underline{\phi}_\beta = \omega_\alpha^2 m_\alpha^* \delta_\alpha^\beta$$

Si se supone la matriz  $\underline{c}$  ortogonal se obtiene:

$$\underline{\phi}_{\alpha}^T \underline{c} \underline{\phi}_{\beta} = 2\eta_{\alpha} \omega_{\alpha} m_{\alpha}^* \phi_{\alpha}^{\beta}$$

con  $\eta_{\alpha}$  la proporción de amortiguamiento crítico del modo  $\alpha$ .

(b) Cambio de coordenadas naturales.

$$\underline{u} = \sum_{\alpha=1}^{N+1} \underline{\phi}_{\alpha} q_{\alpha} = \underline{\phi} \underline{q} \quad (2.56)$$

con lo que la ecuación (2.53) se transforma en el conjunto de las  $N+1$  siguientes ecuaciones desacopladas:

$$\ddot{q}_{\alpha} + 2\eta_{\alpha} \omega_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha} = 0 \quad (2.57)$$

cuya solución es:

$$q_{\alpha} = e^{-\eta_{\alpha} \omega_{\alpha} t} \{ q_{\alpha}(0) \cos \omega'_{\alpha} t + (\dot{q}_{\alpha}(0) + \eta_{\alpha} \omega_{\alpha} q_{\alpha}(0)) / \omega'_{\alpha} \cdot \sin \omega'_{\alpha} t \}$$

con

$$\omega'_{\alpha} = \omega_{\alpha} \sqrt{1 - \eta_{\alpha}^2}$$

Las condiciones iniciales permiten obtener los valores de  $q_{\alpha}(0)$  y  $\dot{q}_{\alpha}(0)$  a partir de la transformación (2.56), resultando:

$$q_{\alpha}(0) = 0$$

$$\dot{q}_{\alpha}(0) = \frac{1}{m_{\alpha}^*} \underline{\phi}_{\alpha}^T \underline{m} \dot{\underline{u}}_0 = \frac{m_1 v_{10}}{m_{\alpha}^*} \phi_{\alpha, N+1}$$

con  $\phi_{\alpha, N+1}$  es el elemento  $N+1$  del modo  $\phi_{\alpha}$ .

Y la solución resulta:

$$q_{\alpha} = \frac{m_1 v_{10}}{m^*} \phi_{\alpha, N+1} \frac{1}{\omega_{\alpha}'} e^{-\eta_{\alpha} \omega_{\alpha} t} \operatorname{sen} \omega_{\alpha}' t$$

y los movimientos reales son:

$$\underline{u} = m_1 v_{10} \sum_{\alpha=1}^{N+1} \frac{\phi_{\alpha, N+1}}{m^* \omega_{\alpha}'} e^{-\eta_{\alpha} \omega_{\alpha} t} \operatorname{sen} \omega_{\alpha}' t \cdot \phi_{\alpha} \quad (2.58)$$

Los esfuerzos en la estructura se deducen inmediatamente a partir de la expresión:

$$\underline{p}(t) = \underline{k} \underline{u} = \underline{k} \underline{\phi} \underline{q} = \underline{\Omega} \underline{m} \underline{\phi} \underline{q}$$

$$\text{con } \underline{\Omega} = \operatorname{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2)$$

En el caso de una rigidez de contacto  $k_1$  infinita se deducen las siguientes conclusiones:

(a) La mayor pulsación propia de la estructura  $\omega_{N+1}$ , conjunta se hace infinita, las restantes permanecen finitas.

(b) Para cada modo  $\alpha$  se cumple

$$\phi_{\alpha, j} = \left(1 - \frac{m_1}{k_1} \omega_{\alpha}^2\right) \phi_{\alpha, N+1} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N, N+1) \quad (2.59)$$

que se convierte en este caso:

$$\phi_{\alpha, j} = \phi_{\alpha, N+1} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (2.60)$$

(c) Para  $t=0$  se cumple que para  $\alpha = N+1$

$$e^{-\eta_{\alpha} \omega_{\alpha} t} = 1$$

Para  $t > 0$  se tiene, por el contrario:

$$e^{-\eta_{\alpha} \omega_{\alpha} t} = 0$$

lo que conduce a un salto de las velocidades a partir de la expresión (2.58) en el término  $N+1$ .

(d) Por otra parte la componente 1 de la ecuación (2.58) es en este caso para  $t > 0$ :

$$u_1(t) = m_1 v_{10} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\phi_{\alpha, N+1}}{m_{\alpha}^* \omega_{\alpha}'} e^{-\eta_{\alpha} \omega_{\alpha} t} \operatorname{sen} \omega_{\alpha}' t \phi_{\alpha, 1}$$

y considerando la expresión (2.60) se deduce:

$$u_1(t) = u_j(t) \quad \text{para} \quad t > 0$$

es decir, el proyectil se incrusta en el pilar (desnudo, pues  $k_1$  es infinito) y a partir de lo cual, se produce un movimiento amortiguado de la estructura conjunta, sometida en  $t=0$  con velocidad  $v_{10}$  en el gdl  $j$ .

(c) La variación de la velocidad es brusca en  $t=0$ . En efecto  $\dot{u} = (\underline{u}_2, u_1)^T$  y se tiene para  $t=0$ :

$$\dot{u}_2 = \dot{v}_{20} = 0 \text{ (reposo para la pila)}$$

$$\dot{u}_1 = v_{10} = v_{10} \text{ (velocidad conocida del barco)}$$

y para  $t > 0$

$$\dot{u}_{2j} = -m_1 v_{10} \phi_{N+1,N+1} \phi_{N+1,j}$$

$$u_1 = v_0 \{1 - m_0 (\phi_{N+1,N+1})^2\}$$

como

$$\phi_{N+1,j} = (1 - \frac{m_1}{k_1} \omega_{N+1}^2) \phi_{N+1,N+1}$$

la velocidad común para  $t > 0$  es:

$$\dot{u}_{2j} = \dot{u}_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} v_0$$

El choque que se produce conserva las cantidades de movimiento entre  $t=0$  y  $t=0+\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ).

Un caso particular interesante corresponde a la modelización de la pila como un sistema con un solo gdl, es decir, suponer  $k_2 \neq 0$ , en la figura 2.9. Las matrices del sistema son; en esta situación:

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{k} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{pmatrix}$$

Las pulsaciones propias resultan de la resolución:

$$|\underline{k} - \omega^2 \underline{m}| = 0$$

es decir:

$$\omega_1^2 = \frac{2k_1 k_2}{m_1 m_2 \omega_0^2 (1 + \sqrt{1 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2 \omega_0^2}})}$$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_0^2}{2} (1 + \sqrt{1 - \frac{4k_1 k_2}{m_1 m_2 \omega_0^2}})$$

con

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k_2}{m_2}$$

Los vectores propios se contienen en la matriz:

$$\underline{\phi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & \frac{\lambda}{\sqrt{m_1}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{m_2}} & -\frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{bmatrix}$$

con

$$\lambda = (1 - \frac{m_1}{k_1} \omega_2^2) \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

La ecuación del movimiento para  $t > 0$ , es:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \frac{v_{10}}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \begin{bmatrix} \lambda \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} (S_1 - S_2) \\ S_1 + \lambda^2 S_2 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas de impacto resultan, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_1(t) \end{bmatrix} &= \frac{v_{10} m_1}{1 + \lambda^2} \begin{bmatrix} \lambda \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} (\omega_1^2 S_1 - \omega_2^2 S_2) \\ \omega_1^2 S_1^2 + \lambda^2 \omega_2^2 S_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con

$$S_\alpha = S_\alpha(t) = e^{-\eta_\alpha \omega_\alpha t} \frac{\text{sen} \omega_\alpha t}{\omega_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2)$$

En el caso de que el proyectil sea rígido ( $k_1$  infinito) se deducen los siguientes resultados límites:

$$u_2 = u_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} S_1$$

con

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_2}{m_1 + m_2}}$$

la pulsación propia de la estructura y las fuerzas de impacto:

$$f_2(t) = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \omega_1^2 S_1 \quad \text{en el nudo 2}$$

$$f_1(t) = \frac{m_0}{m_1} f_2(t) \quad \text{en el nudo 1}$$

y la fuerza total, en el movimiento común:

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t) = m_1 v_{10} \omega_1^2 S_1$$

cuyo valor máximo es:

$$f_{\max} = m_1 v_{10} \sqrt{\frac{k_2}{m_1 + m_2}}$$

El estudio presentado solo es aplicable estrictamente a la fase de comienzo del choque hasta que aparece el primer rebote del proyectil (que ocurre en el primer instante  $t > 0$  para el que  $u_1(t) = 0$ ). Un estudio más exhaustivo debería distinguir las distintas fases sucesivas de funcionamiento: contacto, rebote, contacto, etc. adaptando para cada una de ellos las pertinentes condiciones iniciales en la resolución de la ecuación del movimiento (2.53). Así, en los estudios experimentales de Woisin (6), sobre choques de barcos contra objetos físicos se muestra un diagrama fuerza  $f_2(t)$  sufrido por el puente, en función del tiempo. Se distingue allí, las fases indicadas (figura 2.10):

Rama 0-1: Semionda elástica (casí sinusoidal hasta el primer rebote).

Rama 1-2: Rebote.

Rama 2-3: Como en la rama 0-1, pero disminuidos por el inicio de la plastificación de barco y pila.

Rama 3-4: Carga constante con disipación plástica de la energía hasta la anulación de la fuerza.

Se comprende que estos tipos de estudios elásticos sólo permiten evaluar la fase inicial del choque, es decir, la fase lineal y elástica. La rigidez entre proyectil e objetivo, de valor  $k_1$  actualiza de un modo lineal (proporcional a la deformación) y tanto en tracción como en



compresión, lo que no es realista. Se puede extender la teoría anterior considerando, como se indicó en el apartado 2.5.2, rigideces  $k_1$  no lineales, que incluyan efectos plásticos entre otros. También la posibilidad de considerar mas grados de libertad conectados entre los cuerpos que chocan representa un paso mas en la dirección de una mejor representación del fenómeno. No obstante, la no consideración de la velocidad de las ondas elásticas en relación con la duración del impacto representa una aproximación importante. En el siguiente apartado se comentan las características de mayor interés de la teoría de propagación de ondas de choque.

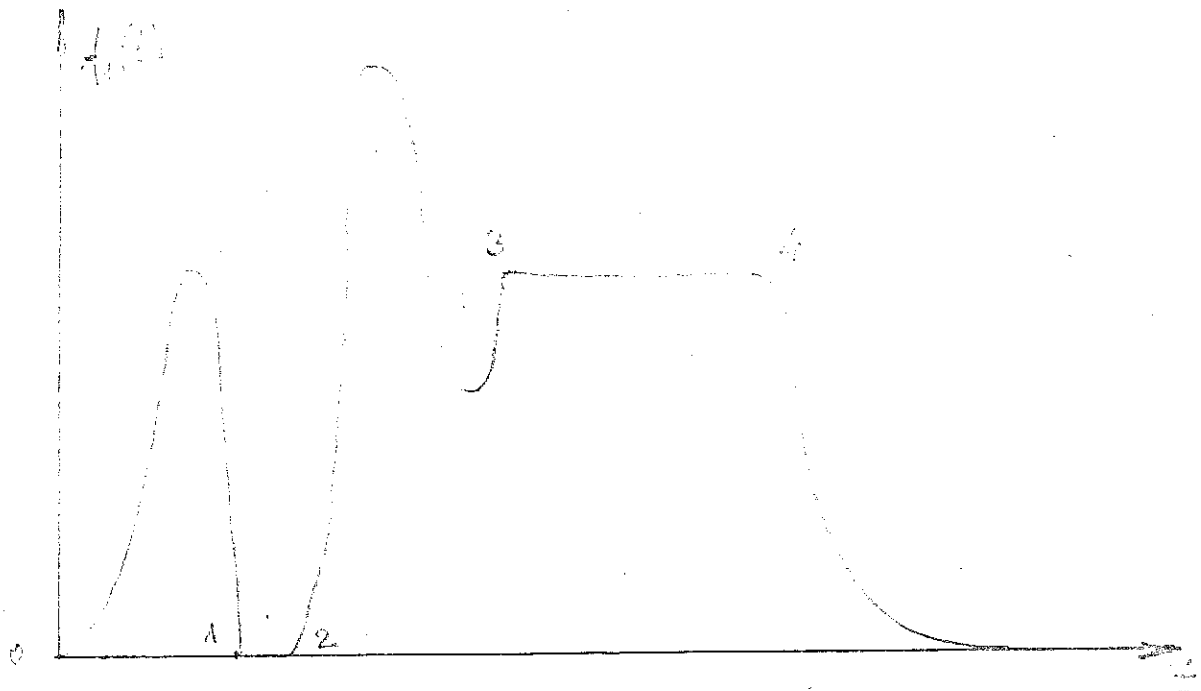


FIGURA 2.10 Ensayos de Woisin.

## 2.6 FENOMENOS ODULATORIOS EN EL IMPACTO

### 2.6.1 Introducción

La consideración de los efectos de la propagación de la onda de tensión durante el impacto se hace preciso cuando las fuerzas o tensio

nes cambian de un modo significativo durante el tiempo requerido para la propagación de estas señales a través del sistema. En esta situación, pueden aparecer desviaciones substanciales de los resultados obtenidos mediante consideraciones de equilibrio estático.

En el viaje de las ondas a través del medio se modifican a la vez la magnitud tensional y la velocidad de las partículas que componen el medio. En el caso mas general las ondas planas se definen como dilatantes si ellas producen movimiento de las partículas en la dirección de la propagación y distorsionantes si causan a las partículas un movimiento normal al de propagación.

Con objeto de concretar las ideas relativas a la propagación de ondas se considera una estructura muy simple: Una barra monodimensional (1-D) sometida a esfuerzos axiales. Se plantearán en este caso sencillo, las ecuaciones del movimiento y su posible resolución, mediante los métodos usuales del análisis dinámico (inercial): técnicas en diferencias directas, superposición de modos, etc... A continuación se expondrá el método alternativo, basado en el modelo de propagación de ondas y cuyo contenido físico, es evidente. Por último un análisis comparativo entre ambos procedimientos -inercial y propagación de ondas- se lleva a cabo. La teoría general de propagación de ondas cierra este apartado.

#### 2.6.2 Ecuación del movimiento

Sea la barra de la figura 2.11 de longitud  $L$ , área y densidad lineal, en general dependientes, de la sección  $x$ , que se designan por  $A = A(x)$  y  $m = m(x)$ , respectivamente.

El módulo de Young o elasticidad del material es  $E$ .

Se supone actúa una carga distribuida  $p(x,t)$  variable con el tiempo. El caso de cargas concentradas se incluye en esta exposición mediante la introducción de las correspondientes distribuciones de Dirac.

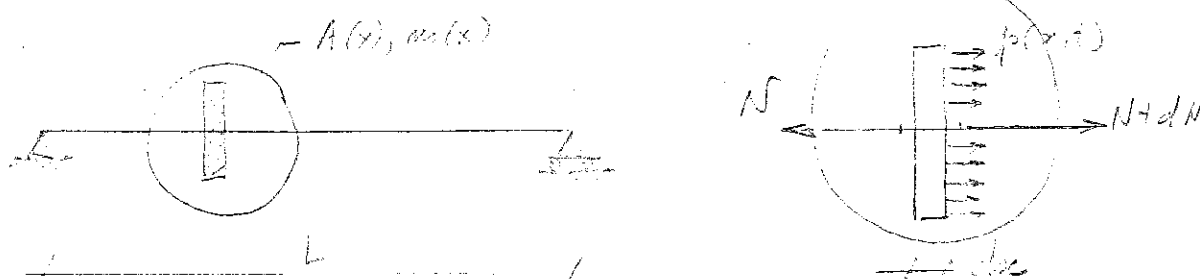


FIGURA 2.11 Barra a extensión.

Si se supone aplicable la teoría lineal del cálculo de estructuras, se tiene para el instante  $t$ :

Ecuación de equilibrio:

$$dN + p(x,t)dx + \left\{ -m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} dx = 0 \quad (2.61)$$

siendo  $u = u(x,t)$  el movimiento (desplazamiento longitudinal) de la sección  $x$  en el instante  $t$ .

Ecuación de compatibilidad:

$$\epsilon(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.62)$$

Ecuación constitutiva:

$$N = EA \epsilon \quad (2.63)$$

con  $N$  axil y  $\epsilon$  deformación axil.

Introduciendo las ecuaciones (2.63) y (2.62) en (2.61), se deduce la ecuación general del movimiento:

$$m \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} - \frac{\delta}{\delta x} (EA \frac{\delta u}{\delta x}) = p \quad (2.64)$$

Las condiciones de borde pueden ser para cada uno de los extremos de la barra  $\bar{x}=0$  ó  $\bar{x}=L$ :

$$\text{Cinemáticas ó esenciales: } u(\bar{x}, t) = \bar{u}(t) \quad (2.65)$$

$$\text{Estáticas o naturales: } N(\bar{x}, t) = EA \frac{\delta u}{\delta x}(\bar{u}, t) = \bar{N}(t)$$

indicando con  $\bar{u}(t)$  y  $\bar{N}(t)$  funciones temporales conocidas.

Las condiciones iniciales, en el instante inicial  $t=0$ , son del tipo:

$$u(x, 0) = \bar{u}_0(x) \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \dot{u}(x, 0) = \bar{v}_0(x)$$

siendo

$\bar{u}_0(x)$  y  $\bar{v}_0(x)$  la distribución inicial de los movimientos y velocidades a lo largo de la barra.

Se designa en lo que sigue una derivada temporal por un punto encima de la función a derivar y por un acento a la derivada espacial.

### 2.6.3 Vibraciones libres

Se definen por  $p(x,t) = 0$ , es decir:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (EA \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \quad (2.67)$$

La técnica de separación de variables conduce a las siguientes expresiones:

$$u(x,t) = \phi(x) y(t) \quad (2.68)$$

$$m \frac{\ddot{y}}{y} = -\lambda = \frac{(EA \phi')'}{\phi} \quad (2.69)$$

o bien denominando pulsación  $w^2 = \frac{\lambda}{m}$ , se deduce las dos ecuaciones:

$$\ddot{y} + w^2 y = 0 \quad (2.70)$$

$$(EA \phi')' + \lambda \phi = 0 \quad (2.71)$$

La ecuación (2.70), indica que la respuesta  $u(x,t)$  a las vibraciones libres es armónica  $Y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \theta_0)$ , con  $Y_0$  y  $\theta_0$  constantes que se determinan como se indica más adelante. La pulsación  $\omega$  se obtiene a partir del autovalor  $\lambda$  que se deduce a partir de la ecuación homogénea (2.71) y las condiciones de contorno (2.65) con segundo miembro nulo, es decir:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 & \delta & & N(0,t) &= 0 \\ u(L,t) &= 0 & \delta & & N(L,t) &= 0 \end{aligned}$$

Existen infinitos autovalores  $\lambda_n$  (en general distintos, ordenados y positivos para estructuras estables). Para cada uno de ellos la forma o autofunción  $\phi_n(x)$  está definida a excepción de un factor constante.

Los valores de las constantes  $Y_0$  y  $\theta_0$  que definen las correspondientes funciones temporales  $Y_n(t)$  de las  $\phi_n(x)$  se obtienen mediante identificación de la posición inicial de la barra -condiciones iniciales (6.6)- con la serie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \lambda_n(t) \quad (2.72)$$

Esta identificación se lleva a cabo mediante el desarrollo en serie generalizada de Fourier de las deformadas iniciales  $\bar{u}_0(x)$  y  $\bar{v}_0(x)$ . El siguiente ejemplo ilustra estas ideas.

Ejemplo 2.1

Vibraciones longitudinales libres de una viga en voladizo de luz, L y sección constante.

La ecuación (2.71) se convierte en la siguiente:

$$\phi'' + \mu^2 \phi = 0 \quad (2.73)$$

con

$$\mu^2 = \frac{\lambda}{EA}$$

Las condiciones de contorno (2.65) son en este caso:

$$\begin{aligned} \phi &= 0 & \text{para} & \quad x = 0 \\ EA\phi' &= 0 & \text{para} & \quad x = L \end{aligned} \quad (2.74)$$

La solución general de (2.73), es:

$$\phi = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$$

Al imponer las condiciones (2.74) se obtiene:

$$C_1 = 0$$

$$EAC_2 \cos \mu L = 0$$

es decir:

$$\mu L = \frac{2n-1}{2} \pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Los sucesivos modos de vibración son:

$$\phi_n(x) = \sin \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{L} \quad (\text{salvo una constante } C_{2n})$$

y las pulsaciones correspondientes  $\omega_n$  se deducen como sigue:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_n^2 EA}{m}} = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EA}{m}} \quad (2.75)$$

Si se conociesen las condiciones iniciales  $\bar{u}_0(x)$  y  $\bar{v}_0(x)$  se obtendría la vibración libre de la barra mediante identificación, es decir:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{0n} \sin(\omega_n t + \theta_n) \phi_n(x) \quad (2.76)$$

para  $t=0$ , se compara con los desarrollos de Fourier de  $\bar{u}_0(x)$  y  $\bar{v}_0(x)$ , lo que permite deducir las constantes  $Y_{0n}$  y  $\theta_n$  (amplitud y desfase) de cada armónico.

Se puede mostrar que los modos de vibración presentan las siguientes propiedades de ortogonalidad:

a) Respecto a las masas:

$$\int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) m(x) dx = 0 \quad \text{si } m \neq n \quad (2.77)$$



b) Respecto a la rigidez axial.

$$\int_0^L \phi_m'(x) \phi_n'(c) EA(x) dx - \phi_m(x) EA(x) \frac{d\phi_n(x)}{dx} \Big|_0^L = 0 \quad (2.78)$$

con  $m \neq n$

#### 2.6.4 Vibraciones forzadas

Sea la ecuación (2.64) del movimiento:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (EA \frac{\partial u}{\partial x}) = p(x, t)$$

y las condiciones de contorno e iniciales (2.65) y (2.66).

La respuesta de la estructura en esta situación se deduce mediante la transformación de coordenadas siguiente:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) Y_n(t) \quad (2.79)$$

en donde  $\phi_n(x)$  corresponde a los modos de vibración libres de la viga y las funciones  $Y_n(t)$  son las nuevas funciones incógnitas del problema.

En efecto, introduciendo (2.79) en (2.64) se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m \phi_n \ddot{Y}_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (AE \phi_n') Y_n = p(x, t) \quad (2.80)$$

Si se multiplica la expresión anterior por  $\phi_m$  y se integra a lo largo de la barra (límites 0 y L) se deduce al considerar las relaciones

de ortogonalidad (2.77) y (2.78), el conjunto de ecuaciones desacopladas:

$$m_n^* \ddot{Y}_n + \omega_n^2 m_n^* Y_n = p_n^*(t) \quad (2.81)$$

con

$$m_n^* = \int_0^L \phi_n^2(x) m(x) dx$$

$$\omega_n^2 m_n^* = - \int_0^L \phi_n(x) \frac{d}{dx} \{ EA(x) \frac{d\phi_n}{dx} \} dx$$

$$p_n^* = \int_0^L \phi_n(x) p(x, t) dx$$

$\omega_n$  es la pulsación n-sima de la viga.

Cada una de las ecuaciones anteriores, se puede integrar facilmente. Su solución es:

$$Y_n = C_{1n} \cos \omega_n t + C_{2n} \sin \omega_n t + \frac{1}{m_n^* \omega_n} \int_0^t p_n^*(z) \sin \omega_n (t-z) dz \quad (2.82)$$

en donde  $C_{1n}$  y  $C_{2n}$  son constantes que se determinan utilizando las condiciones iniciales (2.66). Si estas son nulas (movimientos y velocidades)  $C_{1n}$  y  $C_{2n}$  son asimismo nulas.

Conviene observar que la expresión (2.82) puede ponerse en la forma:

$$Y_n = Y_{0n} \sin(\omega_n t + \theta_{0n}) + \frac{1}{m_n^* \omega_n} \int_0^t p_n^*(z) \sin \omega_n (t-z) dz$$

que permite introducir un sentido físico a las nuevas constantes  $Y_{0n}$  y  $\theta_{0n}$ .

Se comprende que para  $t=0$ ,  $Y_n(t)$  se convierte en la siguiente expresión:

$$Y_n(0) = C_{1n} = Y_{0n} \operatorname{sen} \theta_{0n}$$

y la velocidad  $\dot{Y}_n(t)$  para el instante inicial  $t=0$  es:

$$\dot{Y}_n(0) = \omega_n C_{2n} = \omega_n Y_{0n} \cos \theta_{0n}$$

Por lo tanto la solución inicial es según (6.19):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(0) \phi_n(x) = \bar{u}_0(x)$$

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{Y}_n(0) \phi_n(x) = \bar{v}_0(x)$$

Basta por tanto identificar los coeficientes de los desarrollos generalizados de Fourier de  $\bar{u}_0(x)$  y  $\bar{v}_0(x)$ .

Las expresiones obtenidas en los apartados anteriores son de carácter general, es decir, para otro tipo de elemento estructural vibrante (viga a flexión, sistemas continuos de barras, estructuras discretas, es decir, con un número finito de grados de libertad, etc...) las ecuaciones y las técnicas de resolución son completamente análogas.

### Ejemplo 2.2

Obtener la respuesta dinámica de un pilote fijo en su base y sometido en su cabeza a una fuerza  $P_0$ , cuya variación temporal se muestra en la figura 2.12.

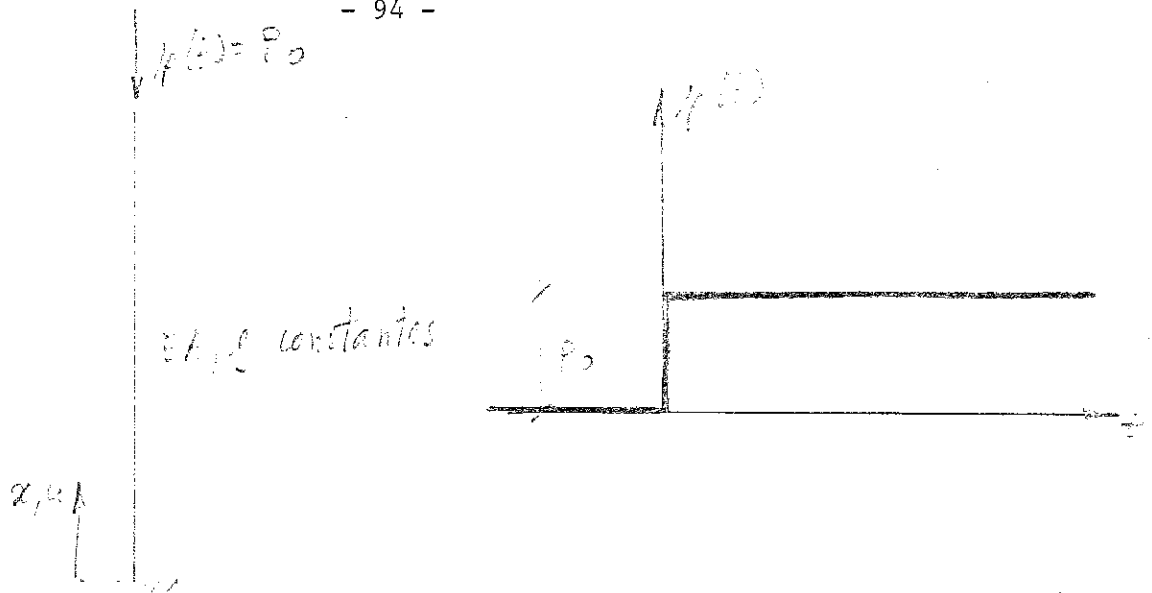


FIGURA 2.12 Ejemplo 2.2.

El cálculo se lleva a cabo en las siguientes fases:

- 1.) Obtención de modos y frecuencias.

A partir del ejemplo 2.1 se deduce:

$$\phi_n(x) = \text{sen } \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{L} \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega_n = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EA}{m}}$$

- 2.) Obtención de la masa y carga generalizada.

$$m_n^* = \int_0^L m \phi_n^2 dx = \frac{mL}{2}$$

$$p_n^* = \int_0^L p(x, t) \phi_n(x) dx = (-1)^n P_0$$

3) Respuesta en coordenadas generalizadas.

$$m_n^* \ddot{Y}_n + \omega_n^2 m_n^* Y_n = (-)^n P_0 h(t)$$

con

$$h(t) = 1 \quad \text{si} \quad t > 0$$

$$h(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leq 0$$

La integral de Duhamel conduce al resultado:

$$Y_n = \frac{(-)^n P_0}{m_n^* \omega_n} \int_0^t h(z) \sin \omega_n (t-z) dz = (-)^n \frac{2P_0}{m \omega_n^2 L} (1 - \cos \omega_n t)$$

4) Respuesta del movimiento.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) Y_n = \frac{2P_0}{mL\omega_n^2} \left\{ -\frac{1-\cos\omega_1 t}{1^2} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1-\cos\omega_2 t}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{L} - \dots \right\} = \\ &= \frac{8P_0}{\pi} \frac{L}{EA} \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{1-\cos\omega_n t}{(2n-1)^2} \sin \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \quad (2.83)$$

5) Respuesta del esfuerzo.

$$N(x,t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4P_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{1-\cos\omega_n t}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{L} \quad (2.84)$$

La respuesta dinámica en cualquier instante (distribución espacial) de la pila del ejemplo 2.2 anterior, se obtiene mediante las expresiones (2.83) y (2.84) como suma de infinitos términos, tanto para el movimiento como para el esfuerzo. Es conveniente utilizar el parámetro de variación temporal  $\omega_n t$  que se puede expresar en la forma:

$$\omega_n t = \left(\frac{2n-1}{2} \pi\right) \frac{ct}{L} \quad \text{con} \quad c = \sqrt{\frac{EA}{m}}$$

La constante  $c$  tiene dimensiones de velocidad. La constante adicional  $\frac{ct}{L}$  representa la proporción de la distancia "viajada" hasta el instante  $t$  por esa velocidad a la luz total  $L$  de la barra.

En la figura 2.13 se muestran las respuestas del movimiento y del esfuerzo axil para cuatro valores en la constante  $\frac{ct}{L}$ , obtenidos mediante las series (2.83) y (2.84). En este caso concreto, la forma de estas distribuciones es simple y se comprueba que los movimientos varían según tramos lineales y los esfuerzos de acuerdo con tramos constantes.

Si  $0 < \frac{ct_1}{L} < 1$ , es decir, valores del tiempo  $t_1$  tales que  $t < \frac{L}{c}$ , se observa que en la distancia  $ct_1$  medida desde la cabeza del pilote, a parece un esfuerzo de valor  $P_0$  y en el resto del pilote no sufre todavía ningún esfuerzo. En realidad a medida que se incrementa  $t_1$ , los esfuerzos se propagan a velocidad  $c$ , es decir, la respuesta del esfuerzo puede ser interpretada como una onda de fuerza de amplitud  $P_0$  propagándose desde la cabeza del pilote a dicha velocidad  $c$ . Los movimientos corresponden, naturalmente a una variación lineal en el tramo  $ct_1$ .

Si  $1 \leq \frac{ct_2}{L} < 2$ , es decir, para valores del tiempo  $t_2$ , comprendidos entre los valores  $\frac{L}{c}$  y  $\frac{2L}{c}$ , la onda de fuerza se duplica en la zona me dida desde su punta (empotrada) de longitud  $ct_2 - L$ , conservando en la res tante zona del pilote (hasta la cabeza) el valor de la onda de fuerza  $P_0$ . Este hecho puede interpretarse como si la onda de fuerza  $P_0$  al alcanzar el extremo empotrado, se reflejase (sin pérdida de forma) con lo que la

nueva onda duplica su amplitud. Analogamente si  $2 < \frac{ct_3}{L} \leq 3$  y  $t_3$  es el tiempo tal que  $\frac{2L}{c} \leq t_3 \leq \frac{3L}{c}$ , se observa que la onda reflejada al llegar al extremo libre de la barra (cabeza del pilote) esta se refleja con valor negativo, por lo que se vuelve a reducir al valor  $P_0$  la onda de fuerza en el tramo superior de la viga, de longitud  $ct_3 - 2L$ . La cuarta fase corresponde a intervalos de tiempo  $t_4$  tales que  $3 < \frac{ct_4}{L} \leq 4$ , la onda reflejada negativamente en la cabeza del pilote, llega a su punto y se refleja produciendo fuerza cero en el extremo empotrado. Al final de esta fase esta onda deja toda la viga sin ningún esfuerzo. A partir del instante  $\frac{4L}{c}$ , la reflexión negativa de esta onda negativa inicia una onda de propagación idéntica a la considerada en la fase 1.

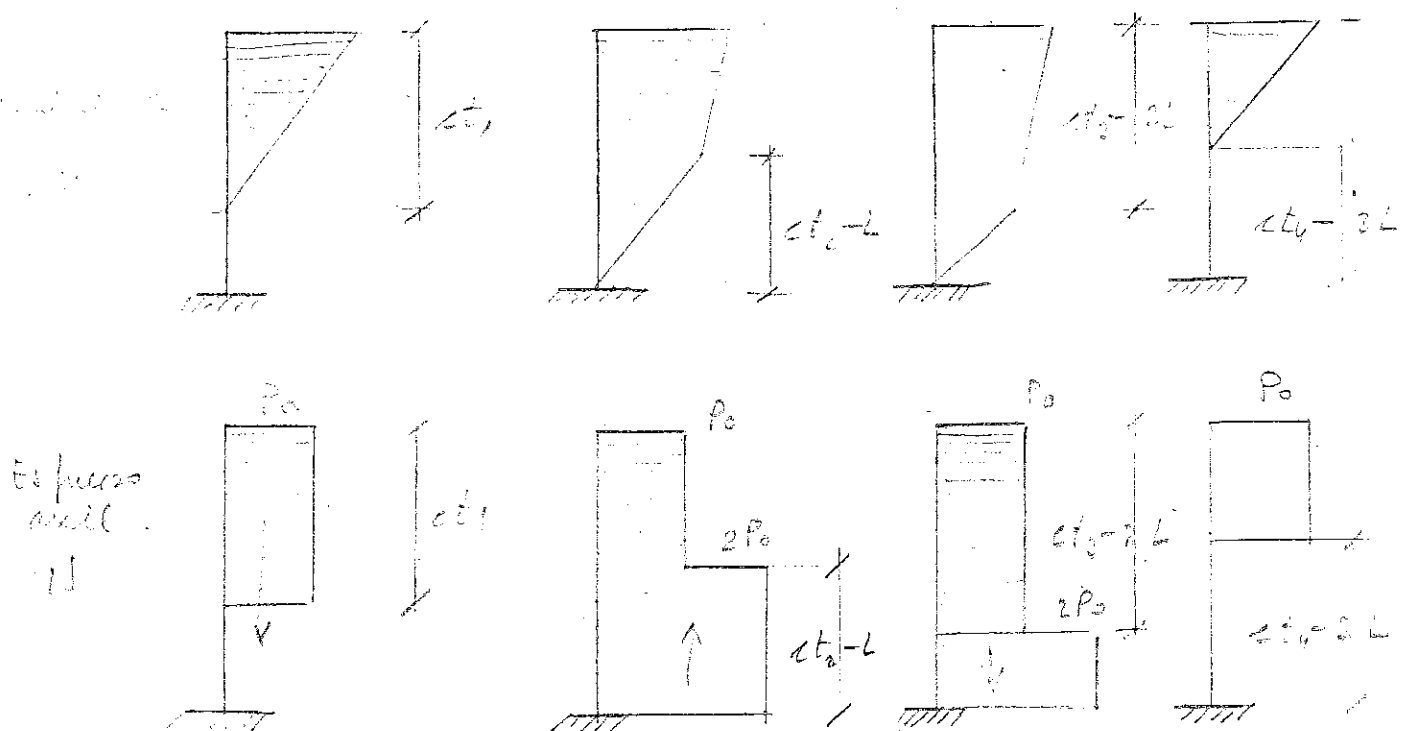


FIGURA 2.13 Respuesta de la pila a una carga salto unidad.

### 2.6.5 Estructuras amortiguadas

A veces se introduce un mecanismo disipador de energía en los sistemas dinámicos lineales, con objeto de simular el hecho de que - las vibraciones no se prolongen indefinidamente sin concurso de una aportación externa de energía. En los sistemas no lineales -en especial elásto-plásticos- los ciclos histéricos permiten y constituyen las principales causas de amortiguamiento de las vibraciones, por lo que el mecanismo disipador viscoso de la energía que aquí se va a comentar sólo es de interés e importancia en los sistemas lineales. Se supone que las fuerzas de amortiguamiento son proporcionales a la velocidad del desplazamiento. La constante de proporcionalidad  $c(x)$ , se denomina amortiguamiento viscoso.

Por lo tanto la ecuación del movimiento (2.64) no amortiguado, se convierte ahora en la siguiente:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = p(x, t) \quad (2.85)$$

El amortiguamiento es ortogonal si se cumple que:

$$\int_0^L \phi_n(x) c(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n$$

siendo  $\phi_n(x)$  y  $\phi_m(x)$  las funciones de forma o modos de vibración libre no amortiguada.

Si  $c(x) = a_0 m(x)$  el amortiguamiento es evidentemente ortogonal.



Si se utiliza el método general de cálculo de la respuesta dinámica a una estructura en vibración forzada, descrito en el apartado 2.4 anterior se obtiene:

$$m_n^* \ddot{Y}_n + c_n^* \dot{Y}_n + \omega_n^2 m_n^* Y_n = p_n^*(t) \quad (2.86)$$

con

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) Y_n(t)$$

$$c_n^* = \int_0^L \phi_n^2(x) c(x) dx$$

El factor de amortiguamiento crítico para el modo  $n$  se define como sigue:

$$\eta_n = \frac{c_n^*}{2\omega_n m_n^*}$$

En general este coeficiente es  $\eta_n \ll 1$ , en las estructuras usuales. La ecuación (2.86) se convierte en:

$$\ddot{Y}_n + 2\eta_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{p_n^*(t)}{m_n^*} \quad (2.87)$$

cuya solución es:

$$Y_n = e^{-\eta_n \omega_n t} (C_1 \cos \omega_{nd} t + C_2 \sin \omega_{nd} t) + \\ + \frac{1}{m_n^* \omega_n} \int_0^t p_n^*(z) e^{-\eta_n \omega_n (t-z)} \sin \omega_{nd} (t-z) dz$$

con

$$\omega_{nd} = \omega_n \sqrt{1 - \eta_n^2}$$

la pulsación viscosa.

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se deducen de las condiciones iniciales, según el esquema de cálculo ya comentado.

## 2.7 ANALISIS DE LA PROGRAMACION DE ONDAS. CASO MONODIMENSIONAL

### 2.7.1 Introducción

El ejemplo 2.2 permite interpretar la respuesta del pilote como una onda de fuerza axial viajando a una velocidad  $c$ , que se refleja en el borde fijo y se refleja con cambio de signo en el libre. En ausencia de amortiguamiento o cambio de carga, este viaje de las ondas continuaría indefinidamente.

El método utilizado en el ejemplo exigió la suma de un número elevado de términos de la serie, incluso para deducir la zona no perturbada, es decir, del frente de onda en la fase 1. Se comprende que el método de superposición de modos, permita simular este viaje de ondas, si bien exige un cálculo laborioso. Existe la posibilidad de un análisis más directo de la respuesta basada en la teoría de propagación de ondas y cuyos resultados son más simples de interpretación.

### 2.7.2 Ecuación de la programación de ondas

Esta ecuación permite considerar de un modo directo la simplicidad del mecanismo de la propagación de las deformaciones y tensiones en forma de onda, sin precisar la utilización de las técnicas de superposición de ondas, que enmascara la esencia del fenómeno propagatorio.

Con objeto de presentar de una forma sencilla estas ecuaciones, se considerará el caso del movimiento de una barra uniforme con ondas longitudinales axiales.

La ecuación que rige esta situación, ha sido deducida en el apartado (2.62) y se escribe:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(x, t) \quad (2.88)$$

para  $0 < x < L$  y  $t > 0$

Las correspondientes condiciones de contorno pueden ser, en cada extremo de la barra, de uno de los dos tipos siguientes:

$$u(x, t) = \bar{u}(t)$$

$$N(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \bar{N}(t)$$

para  $x=0$  ó  $x=L$  y  $\bar{u}(t)$  y  $\bar{N}(t)$  funciones especificadas.

Las condiciones iniciales del problema son ( $t=0$ ):

$$y(x,0) = \bar{u}_0(x)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|_{t=0} = \dot{u}(x,0) = \bar{v}_0(x)$$

con  $\bar{u}_0(x)$  y  $\bar{v}_0(x)$  funciones conocidas.

La ecuación (2.88) puede ponerse en la forma, cuando se consideran vibraciones libres:

$$\ddot{u} - c^2 u'' = 0 \quad (2.89)$$

siendo

$$c = \sqrt{\frac{EA}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

una velocidad, puesto que  $\rho$  es la densidad (volumétrica) del material de la viga.

Se puede comprobar, por simple sustitución que la solución de (2.89) es del tipo:

$$u(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \quad (2.90)$$

siendo  $f_1$  y  $f_2$  funciones arbitrarias de  $x-ct$  y  $x+ct$ , respectivamente. La forma de estas funciones depende de las condiciones de contorno e iniciales del problema.

Se observa que la solución (2.90) representa dos ondas  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  que viajan con velocidades  $c$  y  $-c$  (lo largo del eje  $x$ ), es decir, avanzando y retrocediendo según las  $x$  crecientes respectivamente. En efecto, para  $t=0$ , la solución es -considerando provisionalmente la función  $f_1(x)$ -:

$$u = u(x,0) = f_1(x)$$

En otro instante de tiempo  $t$ , genérico, los movimientos de la barra son:

$$u = u(x,t) = f_1(x - ct) = f_1(x')$$

con  $x' = x - ct$ .

Es decir, la misma función  $f_1(x)$  desplazada, o bien, de un modo equivalente, referida a un nuevo origen de abscisas  $ct$ . Por lo tanto, la onda  $f_1(x)$  se mueve a velocidad constante  $c$  a lo largo del eje  $x$  (figura 2.14).

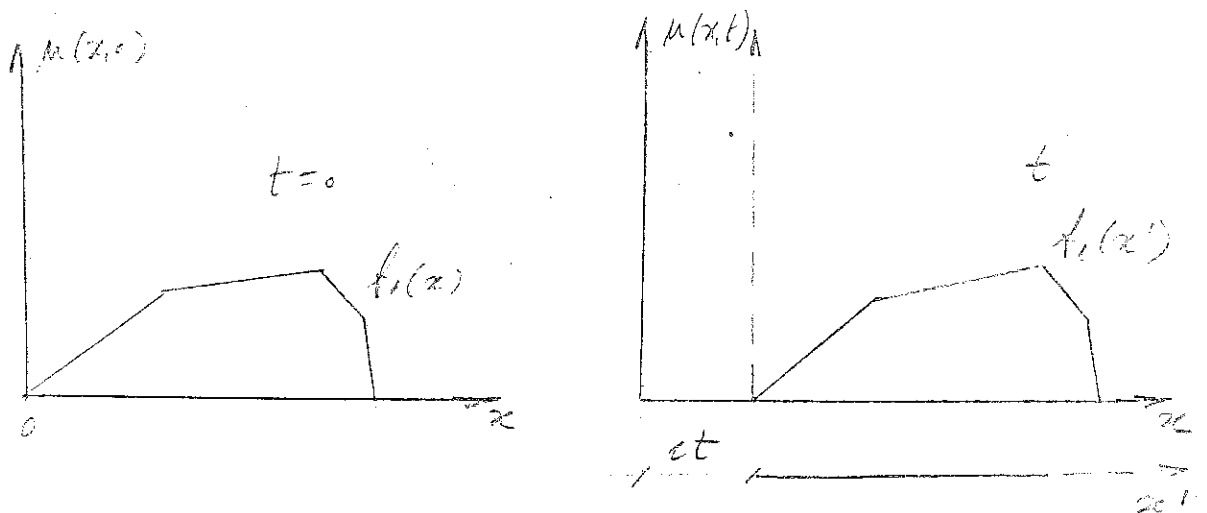


FIGURA 2.14 Onda de movimiento.

De un modo semejante se muestra que la otra función  $f_2(x+ct)$  es una onda que se mueve según la  $x$  decreciente, con la velocidad  $c$ .

Analogamente, los esfuerzos se deducen de la expresión (6.30) mediante derivación:

$$N(x,t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} = EA \frac{\partial f_1(x-ct)}{\partial x} + EA \frac{\partial f_2(x+ct)}{\partial x}$$

es decir:

$$N(x,t) = g_1(x-ct) + g_2(x+ct) \quad (2.91)$$

con  $g_1$  y  $g_2$  las funciones derivadas de las  $f_1$  y  $f_2$ , respectivamente.

De la ecuación (2.91) se deduce que los esfuerzos en la barra se obtienen asimismo como superposición de dos ondas  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  que se mueven según el eje  $x$  con velocidades respectivas  $c$  y  $-c$ .

### 2.7.3 Condiciones iniciales y de contorno

Las condiciones iniciales de la barra permite deducir las funciones de onda  $f_1$  y  $f_2$ . En efecto, para  $t=0$ , las siguientes igualdades son válidas:

$$f_1(x) + f_2(x) = \bar{u}_0(x)$$

$$EA c f_1'(x) - EA c f_2'(x) = \bar{v}_0(x)$$

con lo que resulta:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \bar{u}_0(x) + \frac{1}{2EA\epsilon} \int_0^x \bar{v}_0(x) dx + C$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \bar{u}_0(x) - \frac{1}{2EA\epsilon} \int_0^x \bar{v}_0(x) dx - C$$

Con C una constante arbitraria.

Sin embargo el viaje de avance y retroceso de las ondas  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  se interrumpe al llegar a los extremos de la barra de acuerdo con el tipo de condiciones de borde. A continuación se indica el comportamiento de estas ondas al llegar a un apoyo. Los resultados se estudian para la onda  $f_1$  únicamente, si bien la extensión a la otra onda  $f_2$  de los resultados obtenidos es inmediata.

(a) Borde Libre ( $x=L$ )

La condición de contorno, que se debe satisfacer en todo instante  $t$ , se expresa en este caso como sigue:

$$N(L,t) = 0 = EA \left. \frac{\partial f_1(x-ct)}{\partial x} \right|_{x=L} + EA \left. \frac{\partial f_2(x+ct)}{\partial x} \right|_{x=L}$$

es decir:

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x=L} = - \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x=L} \quad (2.92)$$

Por lo tanto la onda  $f_1$  al llegar al borde libre ( $x=L$ ) genera otra onda  $f_2$  (viajando según las  $x$  decrecientes) que satisface la condición (2.92) es decir, se refleja. La figura 2.15 ilustra este resultado.

Se observa que la onda  $f_1(x-ct)$  al llegar al borde libre  $x=L$ , crea una nueva onda simétrica, que viaja en dirección contraria, a medida que alcanza el punto  $x=L$ . De este modo los movimientos de la onda reflejada son iguales a los de la incidente, en cambio sus derivadas son opuestas, es decir, las tensiones longitudinales cambian de signo.

Por consiguiente al llegar a un borde libre una onda propagatoria, duplica los movimientos longitudinales mientras que las tensiones se anulan entre sí, satisfaciendo de este modo la condición de borde (2.92).

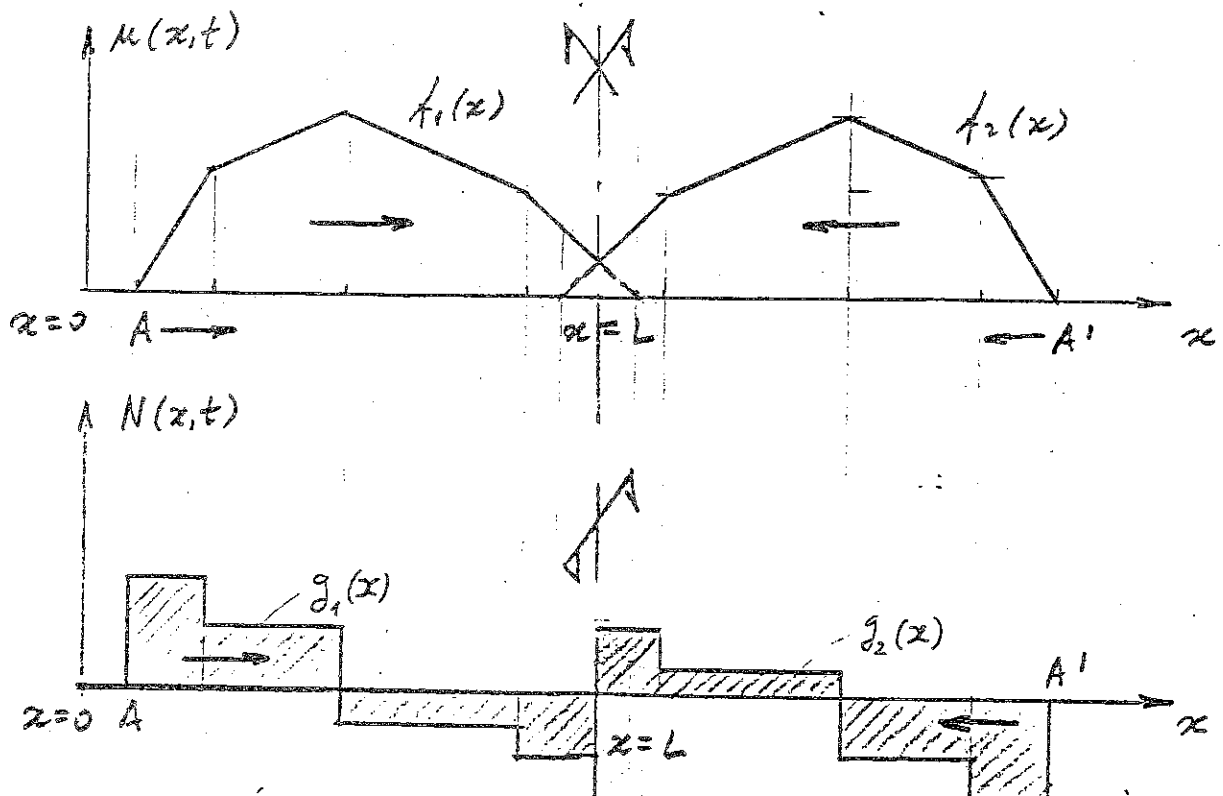


FIGURA 2.15 Comportamiento de las ondas  $f_1$  y  $g_1$  en el borde libre  $x=L$ .



(b) Borde Fijo ( $x = L$ ).

La condición de contorno que en  $x = L$  se debe satisfacer en todo instante es:

$$u(L, t) = f_1(L - ct) + f_2(L + ct) = 0$$

es decir:

$$f_1(L - ct) = -f_2(L - ct) \quad (2.93)$$

Una onda  $f_1$  al llegar a un borde fijo ( $x = L$ ) genera otra onda antisimétrica reflejante, que viaja por lo tanto según las  $x$  decrecientes. Esta onda produce movimientos contrarios a los incidentes y sus tensiones longitudinales son iguales. La figura 2.16 muestra esta situación. Se observa que ahora el movimiento se anula al llegar al borde fijo y las tensiones se duplican. En resumen el borde fijo constituye un mecanismo reflejante de las ondas de tensiones contrariamente al borde libre, que lo es de las ondas de movimientos.

Conviene recordar que los movimientos y tensiones totales serán la suma de estas dos ondas resultantes (en la longitud de la viga), si bien en las figuras 2.15 y 2.16 sólo se ha representado la parte de la onda reflejante en espera de aparecer sobre la viga.

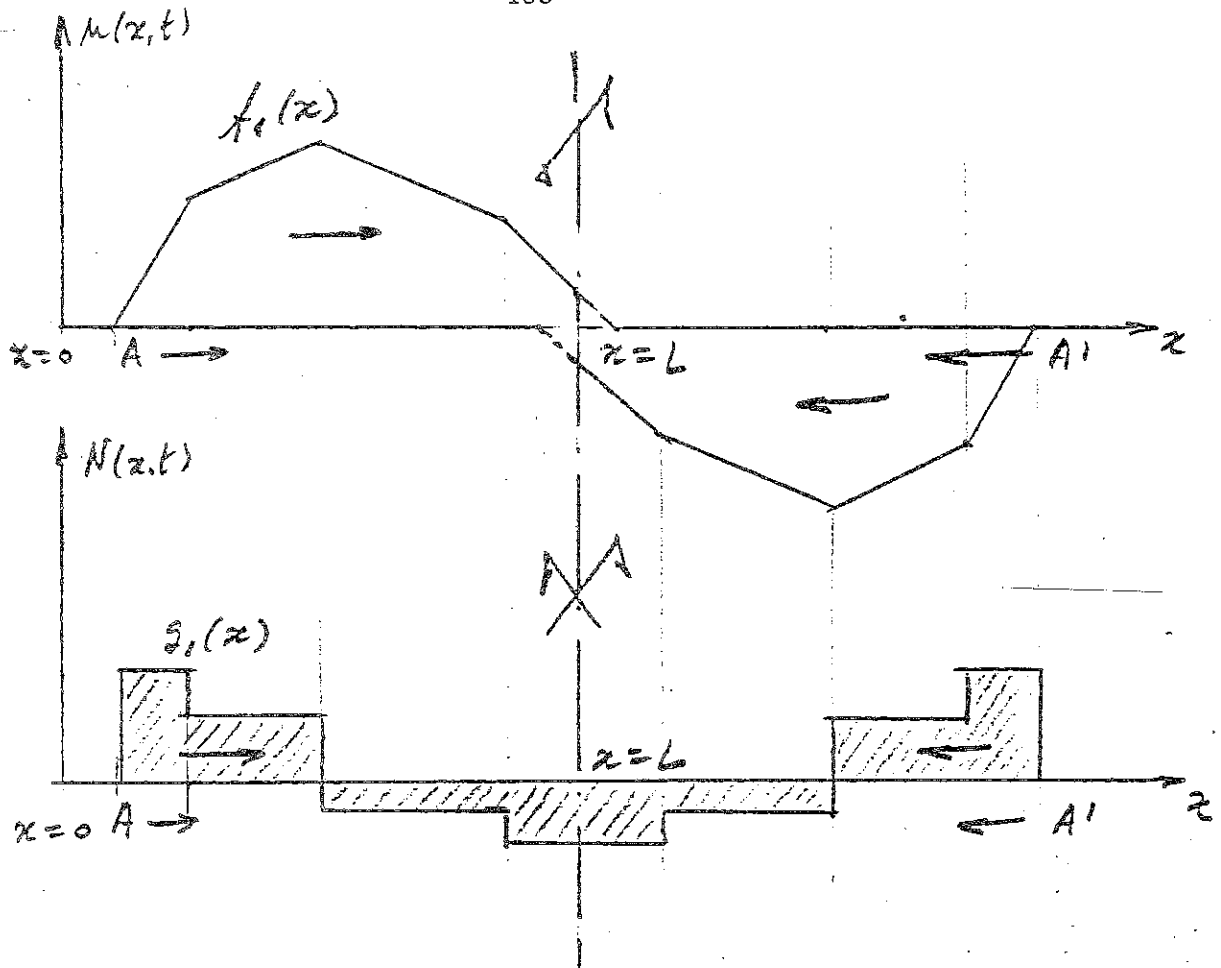


FIGURA 2.16 Comportamiento de las ondas  $f_1$  y  $g_1$  en el borde fijo  $x=L$ .

Análogos resultados se pueden obtener para las ondas  $f_2(x+ct)$  al llegar a un borde  $x=0$ , libre o fijo.

#### 2.7.4 Influencia de las discontinuidades de la estructura

La existencia de una discontinuidad en la variación de la sección de una estructura implica la descomposición de una onda incidente en otras dos -una reflejada y otra refractada, puesto que tienen que satisfacerse las condiciones de compatibilidad y equilibrio en la sección de discontinuidad. Con objeto de concretar las ideas, se considera el problema de propagación de ondas longitudinales axiales a lo lar

go de una barra, con cambio brusco de sus características como se muestra en la figura 2.17.

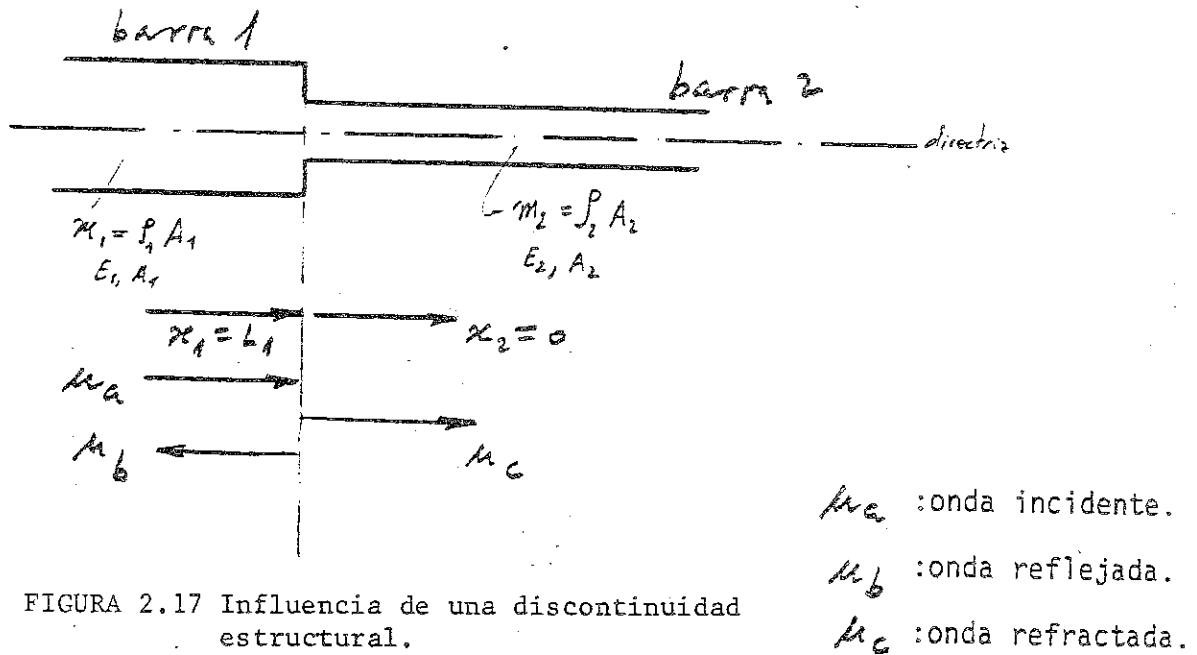


FIGURA 2.17 Influencia de una discontinuidad estructural.

Se designan con los subíndices a, b y c, a las ondas (de movimientos o tensiones) incidentes, reflejadas y refractadas.

Se supone que existe una sola onda incidente, que proviene de la barra 1, en el sentido de avance.

Las condiciones de compatibilidad corresponden en este caso, a la igualdad entre movimientos a un lado y otro de la sección A-A de discontinuidad, es decir:

$$u_a + u_b = u_c \quad (2.94)$$

La condición de equilibrio implica que los esfuerzos longitudinales son iguales en la sección A-A, considerada de las barras 1 y 2.

Por lo tanto, se escribe:

$$N_a + N_b = N_c \quad (2.95)$$

La onda incidente a lo largo de la barra 1, es de la forma:

$$u_a = f_a(x - c_1 t)$$

Se puede comprobar directamente que se cumple la relación:

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = -c_1 \frac{\partial u_a}{\partial x} \quad (2.96a)$$

Análogamente con las restantes ondas:

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} = c_1 \frac{\partial u_b}{\partial x} \quad (2.96b)$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial t} = -c_2 \frac{\partial u_c}{\partial x} \quad (2.96c)$$

La condición de compatibilidad (2.94) se satisface independientemente del instante  $t$ , por lo tanto se puede escribir:

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + \frac{\partial u_b}{\partial t} = \frac{\partial u_c}{\partial t} \quad (2.97)$$

Si se introduce la expresión (2.96) en la relación anterior (2.97) se alcanza el resultado:

$$-c_1 \frac{\partial u_a}{\partial x} + c_1 \frac{\partial u_b}{\partial x} = -c_2 \frac{\partial u_c}{\partial x} \quad (2.98)$$

Esta ecuación (2.98) puede transformarse en otra en esfuerzos, puesto que, en cada barra, la ecuación constitutiva conduce a la expresión:

$$N_a = E_1 A_1 \frac{\partial u_a}{\partial x}; \quad N_b = E_1 A_1 \frac{\partial u_b}{\partial x}; \quad N_c = E_2 A_2 \frac{\partial u_c}{\partial x}$$

y por consiguiente (2.98) se transforma en la siguiente:

$$\frac{c_1}{E_1 A_1} N_a + \frac{c_1}{E_1 A_1} N_b = - \frac{c_2}{E_2 A_2} N_c \quad (2.99)$$

Esta ecuación unida a la de equilibrio (2.95) permite obtener los esfuerzos de las ondas reflejada ( $N_b$ ) y reflectada ( $N_c$ ) en función del esfuerzo en la onda incidente ( $N_a$ ), obteniéndose:

$$N_b = N_a \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}; \quad N_c = N_a \frac{\alpha 2}{\alpha + 1} \quad (2.100)$$

con

$$\alpha = \frac{c_1}{c_2} \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1} = \sqrt{\frac{m_2 E_2 A_2}{m_1 E_1 A_1}} \quad (2.101)$$

Los movimientos se determinan a partir de (2.100) introduciendo las relaciones constituídas de cada barra convenientemente transformadas por las expresiones (2.96), es decir:

$$N_a = E_1 A_1 \frac{\partial u_a}{\partial x} = - \frac{E_1 A_1}{c_1} \frac{\partial u_a}{\partial t}$$

$$N_b = E_1 A_1 \frac{\partial u_b}{\partial x} = \frac{E_1 A_1}{c_1} \frac{\partial u_b}{\partial t}$$

$$N_c = E_2 A_2 \frac{\partial u_c}{\partial x} = - \frac{E_2 A_2}{c_2} \frac{\partial u_c}{\partial t}$$

con lo que resulta, tras integración respecto  $t$ :

$$u_b = -u_a \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \quad (2.102)$$

$$u_c = u_a \frac{2}{\alpha+1}$$

Se comprende que el parámetro adicional  $\alpha$ , definido por la expresión (2.101) determina totalmente el carácter de la discontinuidad de la barra y la relación entre las amplitudes relativas de las ondas reflejada y refractada. Las fórmulas deducidas en (2.100) y (2.102) permiten simular las condiciones de contorno -borde libre  $m_2 E_2 A_2 = 0$  ( $\alpha=0$ ) y borde fijo  $m_2 E_2 A_2 = \infty$  ( $\alpha=\infty$ )- así como la situación de continuidad -completa (barra sección uniforme) para la cual  $\alpha = 1$ . Los valores obtenidos en estos casos particulares coinciden con los calculados en el apartado 2.7.3 anterior. La tabla 2.2 muestra de un modo resumido algunos resultados numéricos.

CASO	$\alpha$	ONDAS DE MOVIMIENTOS			ONDAS DE ESFUERZOS		
		$u_a$	$u_b$	$u_c$	$N_a$	$N_b$	$N_c$
Sin discontinuidad	1	1	0	1	1	0	1
Borde libre	0	1	1	2	1	-1	0
Borde fijo	$\infty$	1	-1	0	1	1	2
$\frac{A_2 E_2}{A_1 E_1} = \frac{m_2}{m_1} = 2$	2	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{A_2 E_2}{A_1 E_1} = \frac{m_2}{m_1} = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

TABLA 2.2.- Resultados correspondientes a diversas discontinuidades.

### Ejemplo 2.3

Resolver el problema del ejemplo 2.2 suponiendo que la barra, de material uniforme, está compuesta de tres barras de igual longitud y área constante ( $4A$ ,  $2A$  y  $A$ ) decreciendo las secciones a partir del borde libre (figura 2.18). Las características del material son módulo de elasticidad  $E$  y densidad  $\rho$ .

La onda de esfuerzos se propaga con velocidad  $c_i$  con:

$$c_i = \sqrt{\frac{A_i E}{m_i}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = c \quad (\text{independiente del tramo})$$

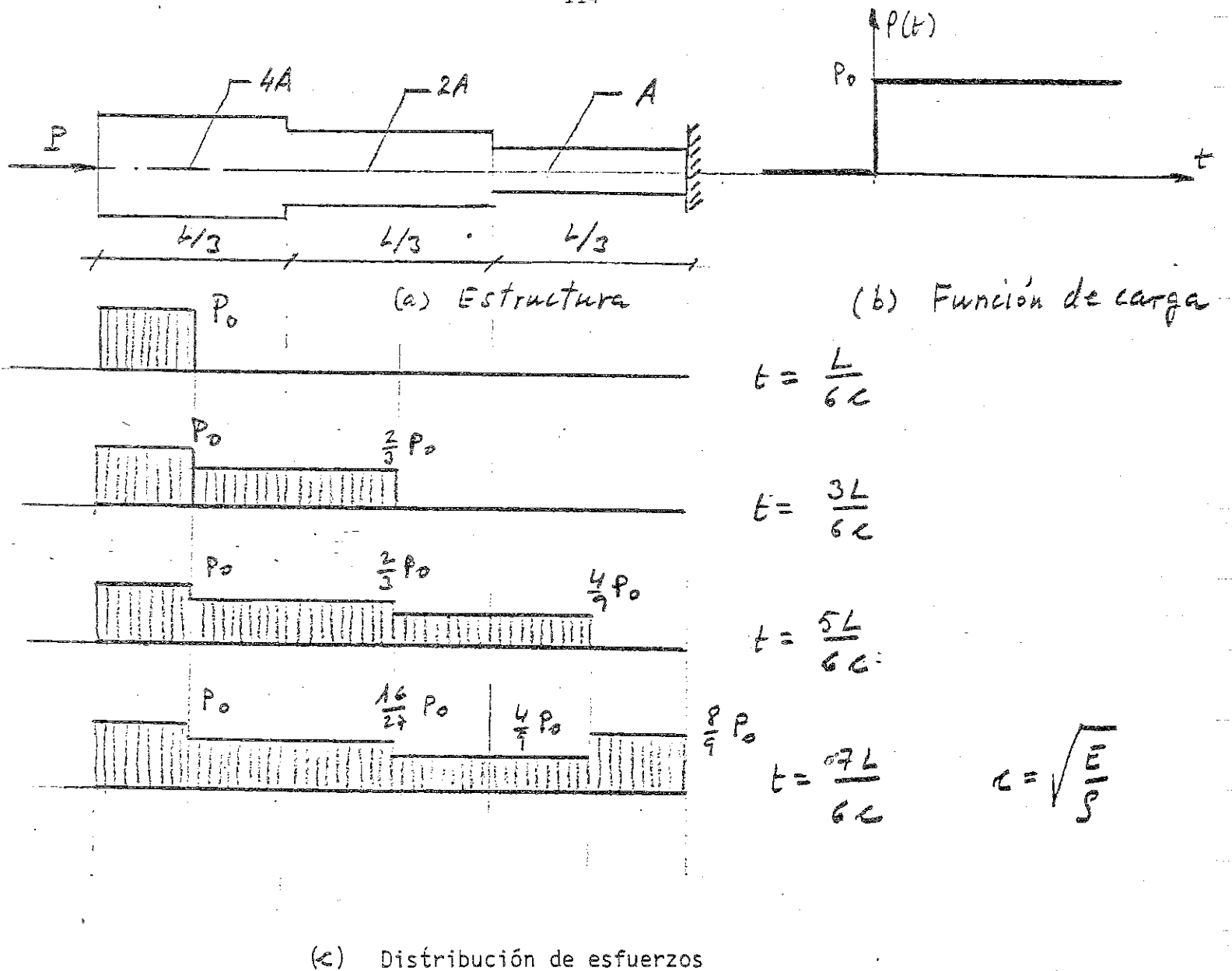


FIGURA 2.18 Ejemplo 2.3.

Las posiciones de la onda de esfuerzos para distintos valores del tiempo pueden verse en la figura 2.18. En ella se han utilizado - resultados de la tabla 2.2, correspondientes a  $\alpha = 2$  y  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Las distribuciones de movimientos correspondientes se deducen por integración.



## 2.8 ANÁLISIS DE LA PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS. FORMULACIÓN GENERAL

### 2.8.1 Notación y definiciones previas

Se va a considerar el caso general de propagación de ondas en un medio elástico continuo tridimensional.

Bajo la actuación de una carga impulsiva se producen en un sólido unos movimientos, deformaciones y tensiones en general variables de un punto a otro de este, así como a lo largo del tiempo.

Si se adopta un sistema de coordenadas cartesiano rectangular (x y z), se puede definir el tensor de tensiones:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

que es simétrico.

Las ecuaciones de equilibrio de un elemento infinitesimal volumétrico supuesta la actuación de las fuerzas másicas X, Y, Z son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Dentro de un estudio en pequeñas deformaciones, estas se definen en cada punto del sólido mediante las nueve cantidades correspondientes a las derivadas de los movimientos  $u$ ,  $v$  y  $w$ , es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

o bien, por conveniencia agrupadas del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; & 2\bar{\omega}_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; & 2\bar{\omega}_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; & 2\bar{\omega}_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Las deformaciones  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\epsilon_z$  corresponden a los movimientos relativos o unitarios de un elemento diferencial lineal en la dirección  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente. Las cantidades  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  corresponden a los componentes de la deformación por cortante según el plano correspondiente. Por último,  $\bar{\omega}_x$ ,  $\bar{\omega}_y$ ,  $\bar{\omega}_z$  no son deformaciones sino las componentes de la rotación de un cubo elemental alrededor de su centro.

En el caso de que el sólido esté constituido por un material elástico y hookeano, supuesta la situación más general de anisotropía, se precisan 21 constantes para definir la relación lineal entre tensiones y deformaciones. Si el material es isotrópico y homogéneo sólo dos constantes son suficientes para expresar las relaciones entre ten

siones y deformaciones. Estas suelen ser los parámetros de Lamé  $\lambda$  y  $G$ , de acuerdo con las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (\lambda + 2G)\varepsilon_1 + \lambda \varepsilon_2 + \lambda \varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= \lambda \varepsilon_1 + (\lambda + 2G)\varepsilon_2 + \lambda \varepsilon_3 \\ \sigma_3 &= \lambda \varepsilon_1 + \lambda \varepsilon_2 + (\lambda + 2G)\varepsilon_3\end{aligned}\tag{2.106}$$

en donde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  son las tensiones principales del tensor de tensiones definido en (2.103) y  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  las deformaciones correspondientes.

Las ecuaciones (2.106) pueden ponerse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \lambda e + 2G \varepsilon_1 \\ \sigma_2 &= \lambda e + 2G \varepsilon_2 \\ \sigma_3 &= \lambda e + 2G \varepsilon_3\end{aligned}\tag{2.107}$$

con  $e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ . Esta suma  $e$  representa la dilatación volumétrica, es decir, para pequeñas deformaciones:

$$1 + e = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

En el caso general de coordenadas, las ecuaciones (2.107) se conservan como se indica:

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \epsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G \epsilon_y \quad (2.108)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \epsilon_z$$

Existen otras constantes elásticas que se utilizan frecuentemente de un modo equivalente para definir el material. Algunas de ellas son:

Módulo de elasticidad o de Young, el módulo de cortante o constante de Lamé  $G$ , la incompresibilidad  $k$  o relación entre la presión hidrostática y la dilatación que produce, el coeficiente de Poisson, etc.

La relación entre estas constantes se obtienen mediante simples consideraciones. Por ejemplo, si la presión hidrostática actúa sobre el elemento volumétrico infinitesimal, se escribe:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$$

con lo que sumando las ecuaciones (2.107) se llega a la siguiente expresión:

$$3p = 3\lambda e + 2Ge$$

con lo que el módulo de incompresibilidad es:

$$K = \lambda + \frac{2}{3} G$$

De un modo similar se deducen las siguientes expresiones de las constantes elásticas anteriores en función de las de Lamé:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

$$E = G \frac{(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$$

Las relaciones siguientes entre las constantes suelen ser útiles en el cálculo:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} = K - \frac{2}{3} G = 2\nu \frac{G}{1-2\nu}$$

$$K = \frac{2(1+\nu)G}{3(1-2\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.109)$$

$$E = \frac{9KG}{3K+G}; \quad \nu = \frac{3K-2G}{2(3K+G)}$$

Las relaciones inversas a las (2.108) son:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\}; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\}; \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \quad (2.110)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\}; \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}$$

### 2.8.2 Ecuaciones fundamentales de la onda elástica

Si en un sólido deformable sometido a una acción dinámica se supone que no existen cargas másicas, las ecuaciones del movimiento corresponden a las (2.104) considerando las fuerzas de D'Alembert, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{2.111}$$

en donde  $\rho$  se corresponde a la densidad del sólido, en el punto (x,y,z), donde se plantea el equilibrio. Considerando la relación tensión-deformaciones (2.108) y las expresiones de las deformaciones (2.105) en la ecuación anterior de equilibrio (2.111), se obtiene:

$$\begin{aligned}(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{2.112}$$

Las tres ecuaciones de equilibrio dinámico (2.112) rigen la propagación de las perturbaciones transitorias a través de cuerpos elásticos isótropos. A continuación se comprobará que únicamente existen dos modos de propagación, distorsión y dilatación, cada uno de ellos mo-viéndose con su propia velocidad característica.

Derivando los dos miembros de cada ecuación (2.112) con respecto a la pertinente variable espacial  $x, y, z$ , se deduce la ecuación de las ondas:

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 e = \rho \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (2.113)$$

La dilatación  $e$  se propaga a través del sólido con una velocidad:

$$c_1 = \left( \frac{\lambda + 2G}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.114)$$

Por otra parte si se elimina la dilatación  $e$  entre las ecuaciones (2.112), se deduce:

$$G\nabla^2 \bar{\omega}_x = \rho \frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial t^2} \quad (2.115)$$

Ecuaciones análogas se obtienen con respecto a las restantes rotaciones  $\bar{\omega}_x$  y  $\bar{\omega}_y$ . Es decir, la rotación se transmite con velocidad:

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.116)$$

Si ahora se supone que la dilatación  $e$  es nula, en la ecuación (2.112) se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= G \nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= G \nabla^2 v \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= G \nabla^2 w\end{aligned}\tag{2.117}$$

Las ecuaciones (2.117) expresan el hecho de que las ondas equívolumétricas, que implican dilatación nula se propagan con la velocidad  $c_2$ .

Por otra parte si la propagación es irrotacional (los tres componentes  $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$  nulos) se sabe que los movimientos  $u, v, w$ , proceden de un campo potencial  $\phi$ , es decir:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}\tag{2.118}$$

Si estas expresiones se sustituyen en la ecuación (2.112) considerando que se cumple:

$$e = \nabla^2 \phi; \quad \frac{\partial e}{\partial x} = \nabla^2 u; \quad \frac{\partial e}{\partial y} = \nabla^2 v; \quad \frac{\partial e}{\partial z} = \nabla^2 w$$

se deducen las siguientes relaciones:



$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 u$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 v \quad (2.119)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 w$$

Las ecuaciones (2.119) indican que las ondas pueden propagarse a través del sólido elástico de modo que no se produzca rotación, con una velocidad  $c_1$ .

Las ondas irrotacionales se suelen denominar longitudinales o de dilatación. Las ondas equivolumétricas se llaman de cortante, transversales o de distorsión. Este último término puede inducir a confusión puesto que las ondas irrotacionales implican dilatación y distorsión, pero las ondas equivolumétricas únicamente distorsión.

La figura 2.19 ilustra este hecho, en el que incluso con ondas longitudinales con movimiento restringido a la dirección de propagación de la onda. En efecto, los módulos de dilatación y cortante controlan la velocidad de propagación, así ésta es en función de los módulos citados:

$$c_1 = \left\{ \left( K + \frac{4}{3} G \right) / \rho \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.120)$$

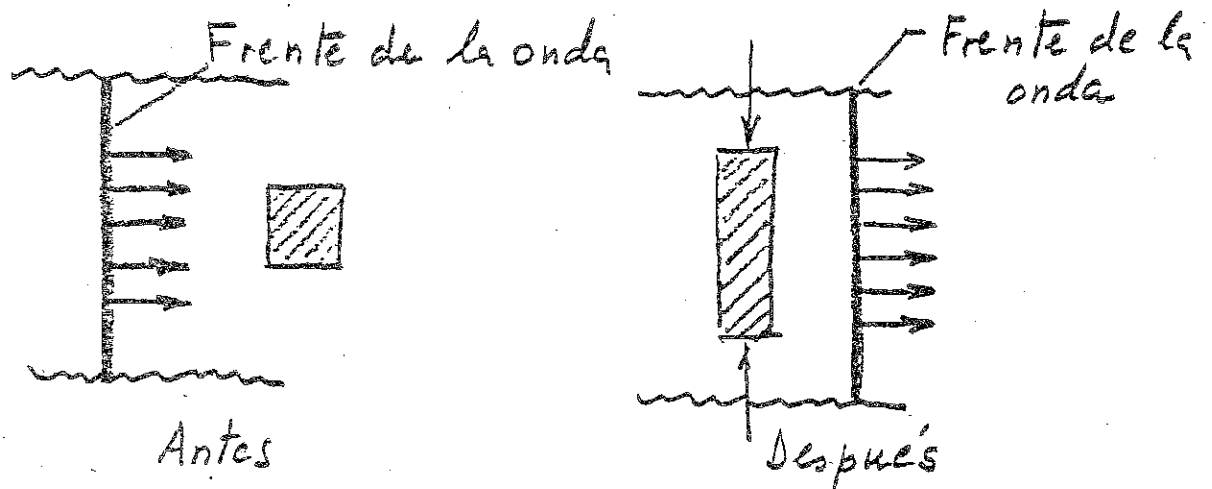


FIGURA 2.19 Cambio de forma en un elemento diferencial de volumen al paso de una onda transitoria de tensión.

En dicha figura se observa que los cambios de forma implican la resistencia del material simultaneamente a compresión y cortante. La deformación en la dirección normal, paralela al frente de onda, es nula, así se escribe:

$$\epsilon_y = 0 = \frac{\sigma_y}{E} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\frac{1}{E}$$

que conduce a la siguiente relación entre las tensiones:

$$\sigma_y = \sigma_x \frac{\nu}{1-\nu}$$

La dirección  $y$  es arbitraria pero debiendo siempre permanecer en el plano del frente de la onda.

## REFERENCIAS

- (1)- "Concrete Structures under impact and impulsive loading" RILEM-CEB-IABSE-IASS Interassociation Symposium. Berlin (1982)
- (2)- Zia, P, White, R.N y Vanhorn, D.A. "Principles of model analysis" en "Models for concrete structures". ACI-Publ. SP-24. (1970).
- (3)- Goldsmith, W. "Impact. The theory and physical behaviour of colliding solids". Edward Arnold. Londres (1960).
- (4)- Kuske, A. "Photoelastic stress analysis of machines under dynamic load". Experimental Mechanics 17 Num. 3 (1977).
- (5)- Reinhardt, H.W. y Dally J.W. "Some characteristics of Rayleigh wave interaction with surface flaws". Materials Evaluation 18. Num 10. (1970).
- (6)- Woisin, G. "Schiffbauliche Forschungsarbeiten für die Sicherheit kernenergieertriebener Handelsschiffe" (Investigación estructural de barcos para la seguridad de sabotaje impulsado por energía nuclear). Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft. Volumen 65. (1971).
- (7)- Ando, N. y Arita K. "A Study on the Strength of Double-Hull Structures in Collision" (en japonés). Trans. Soc. Of naval Arch of Japan 139. (1976).

- (8)- Arita, M., Ando, N. y Arita, K. "Study on the Structural Strength of Ships in Collision". Conferencia on Fracture Mechanics and Technology Hong Kong (1977).
- (9)- Nagasawa, H., Arita K., Tani, M. y Oka, S. "A Study on the Collapse of Ship Structure in collision with Bridge Piers" (en japonés). Trans. Soc. of Naval Arch. of Japan 142 (1977).
- (10)- Iwai, A., Nagasawa, H., Oka, K. y Shoji, K. "Ship-Bridge pier protective systems". Proc. Coastal Engineering Conference (1980).
- (11)- Reckling, K.A. "Beitrag der Elasto und Plastomechanic zur Untersuchung von Schiffkollisionen" (en alemán) Jahrbuch der Schiffbau-technischen Gesellschaft, 70 (1976).
- (12)- Reckling, K.A. "On the Collision Protection of Ships" Int. Symp. on Practical Design in Shipbuilding. Soc. of Naval Arch. of Japan. Tokio (1977).
- (13)- Jones, N. "A literature survey on the collision and grounding protection of Ships" U.S. Coast Guard Headquarters Washington D.C. (1979).
- (14)- Saul, R. y Svenson H. "Zum Schutz von Bruckenpfeilern gegen Schiffsanprall" (Sobre la protección de pilas de puentes contra la colisión de barcos). Die Bautechnik 58 (1981).

- (15)- Woisin, G. "Konstruktion gegen Kollisionsauswirkungen" (Estructuras contra los efectos de la colisión de barcos). Schiff und Hafen/Kommandobrücke 31. Volumen 12 (1979).
- (16)- Woisin, G. "Die kollisionsversuche der GKSS". (Los ensayos de choque de la GKSS). Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft. Volumen 70 (1976).
- (17)- Saul, R. y Svenson, H. "On the theory of ship collision against Bridge Piers". IABSE Proceedings. Mayon (1982).
- (18)- Minorsky, V.U. "An Analysis of ship collision with Reference to Protection of Nuclear Power Plants". Journal of Ship Research 3. (1959).
- (19)- Woisin, G. y Gerlach, W. "Beurteilung der Kräfte aus schiffsstößen auf Leuchttürme in See" (Evaluación de las fuerzas debidas a las colisión de barcos contra faros en alta mar). German Technical Reports for the 8-th International Seamark Conference. Stockholm (1970).
- (20)- Barkan, P. "Impact " Sección 16 del libro "Mechanical Design and Systems Handbook" H.A. Rothbart (Edit.) Mac. Graw-Hill Book Comp.
- (21)- Fauchart J. "Chocs sur Structures Elastiques". Symposium d'Ingenieric" SNED Tanger. Mayo (1982).

- (22)-Bouligand, G. "Mecanique Rationnelle" París. Ed. Vuibert (1959).
- (23)- Samartín, A. "Sistemas con N-grados de libertad". Capítulo 3 dentro del libro: "Cálculo Dinámico Aplicado a la Ingeniería Civil". Editado por el Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid. (1974).
- (24)- Rinehart, J.S. "Stress Transients in Solids". Hyperdinamics. New México (1975).

### 3.- SIMULACION NUMERICA DE LOS FENOMENOS DE IMPACTO

#### 3.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Los métodos analíticos reseñados en el capítulo anterior, son útiles en el desarrollo de captación de los fenómenos físicos dominantes en una situación dada de impacto y como ayuda en la experimentación. Pueden ser, asimismo, utilizados en predicción del resultado de un impacto, teniendo precaución de no violar las hipótesis simplificadoras introducidas en el análisis o el rango de validez de los valores de las constantes empíricas consideradas. No obstante si se precisa una solución completa de una situación de impacto se tiene que recurrir a la simulación numérica. En efecto no existe actualmente ningún modelo analítico que permita analizar situaciones tan complejas como choques oblicuos o en los que el estado tensional tridimensional es dominante del fenómeno. Programas de computador de análisis bi y tridimensionales del impacto evitan la necesidad de introducir hipótesis y simplificaciones y son susceptibles de tratar geometría y tipos de cargas complejos. Sin embargo, su exactitud y utilidad se encuentra limitada por las descripciones implícitas de los materiales involucrados en el impacto e implícitas en sus ecuaciones constitutivas. Se pueden obtener resultados excelentes y en concordancia con la experimentación en las situaciones para las que el comportamiento del material se conoce adecuadamente, como se reporta en (1).

Desde varios años se llevan a cabo de un modo rutinario simulaciones numéricas de choques en dos dimensiones. Actualmente, el interés de la investigación y desarrollo de programa se centra en las simulaciones tridi-

mensionales. La aparición de los computadores vectoriales ha permitido la implementación de programas de carácter tridimensional que se comentaran mas adelante. El tipo de problemas que se analizan con estas simulaciones tienen un carácter predominantemente militar, sin embargo, se inicia su aplicación a otras áreas técnicas (Geofísica, Minería, etc).

En la figura 3.1 se resumen el proceso de cálculo del impacto. Las tres grandes fases del análisis listadas en la figura pueden ser incorporadas dentro de único programa de computador o por el contrario recogerse en tres programas separados. En cualquier caso, todo análisis de este tipo exige en mayor o menor nivel de desarrollo programas que generen automática de la malla de cálculo a partir de una descripción simple y resumida de la geometría de los sólidos, que es suministrada por el usuario. Simultáneamente con esta información es preciso describir los materiales que constituyen los sólidos mediante la especificación de los parámetros apropiados de las ecuaciones de estado y de las relaciones tensión-deformación utilizadas en el programa tanto en los regímenes elástico como plástico así como los criterios de rotura que se consideran. Los datos finalizan con una descripción de las condiciones de contorno e iniciales. Esta fase del cálculo, se automatiza mediante un conjunto de programas de computador que se denomina preprocesador. Con ellos se prepara la información en forma directamente utilizable para la siguiente parte, el procesador principal, y asimismo imprime o muestra gráficamente de forma interactiva la geometría inicial y restantes condiciones para su verificación por el usuario. La mayoría de los preprocesadores actualmente existentes permiten al usuario a través de terminales gráficos, la visión de los resultados completos o parcia-



les obtenidos por el preprocesador y la modificación de malla de cálculo, las condiciones de contorno e iniciales y la descripción del material.

PREPROCESADOR

Geometría inicial  
Descripción material  
Condiciones iniciales y de contorno

PROGRAMA  
(PROCESADOR)  
PRINCIPAL

Ecuaciones de equilibrio  
    .Masa  
    .Cantidad de movimiento  
    .Energía  
    .Entropía  
Modelo del material  
    .Relación tensión-deformación  
    .Ecuación de estado  
    .Criterio de rotura  
    .Modelo de post-rotura

POST-PROCESADOR

.Campos de movimientos, tensiones, deformaciones,  
presiones y temperaturas  
    .Velocidades y aceleraciones  
    .Esfuerzos  
    .Energías

FIGURA 3.1.- Fases de cálculo en una simulación del impacto.

Las leyes de conservación de la masa de equilibrio de la cantidad de movimiento, en conjunción con la ecuación de estado para determinación de las presiones, las relaciones constitutivas, el criterio de rotura y un modelo de postrotura se introducen dentro de un esquema en diferencias finitas o elementos finitos y se integran en el tiempo con los resultados obtenidos del preprocesador. Esta tarea se lleva a cabo en la fase siguiente del cálculo denominada programa principal. Los cálculos precisos en esta fase son necesariamente largos y exigen cantidades importantes de memoria, lo que generalmente supone que los problemas de impacto no pueden ser ejecutados en una sola vez sin interrupción, es decir, se hace preciso disponer en el programa de las potencialidades de parada y recomienzo de tareas, con objeto de que se pueda reanudar un cálculo después de su interrupción debido a razones administrativas o físicas.

Los resultados de los cálculos del programa principal son generalmente ingentes en volumen, ya que la descripción completa del campo de las cantidades físicas y condiciones del material del problema del impacto se producen en cada instante de tiempo. Los listados de salidas de resultados de casos bi y tridimensionales pueden ser por este motivo de varios centenares de páginas que impiden su lectura e interpretación. Los post-procesadores intentan paliar esta situación, preparando salidas-gráficas o fácilmente interpretables de resultados de interés como movimientos, velocidades, temperaturas, etc. a instantes dados o bien historias temporales de variables de campo de interés en regiones especificadas. El grado de refinamiento de los programas de un postprocesador varia considerablemente de unos a otros. Ellos son dependientes

unicamente del computador en los que se procesan sino del tipo de instalación informática disponible. El traspaso de un postprocesador de una instalación a otra puede ser una tarea no trivial y requerir el es fuerzo de varios meses-hombres.

La decisión de utilizar este tipo de programas debe ser meditada puesto que estos no pueden ser tratados como "cajas negras". En general, se requiere un esfuerzo mínimo de varios meses para que nuevos - usuarios puedan resolver problemas prácticos mediante los programas - existentes. Durante el periodo de aprendizaje, se precisa una colaboración intensa con los que han desarrollado dichos programas o por usua rios experimentados en su utilización. Incluso, ante situaciones nuevas, no consideradas inicialmente, puede ser preciso asesoramientos y reprogramación adicionales. Ello, unido a los no despreciables tiempos de com putador que exige esta puesta a punto convierte la instalación de un programa de esta clase en un nuevo equipo informático, en una tarea no trivial. Las ventajas que se derivan de la utilización de programas de impacto son considerables, una vez superada esta fase inicial, tanto en una mejora del diseño como en una reducción del tiempo de su elaboración. Conviene, no obstante, tener siempre presente, que la bondad de los resultados deducidos de un modelo numérico están íntimamente relacionados con la adecuada descripción del computamiento del material a las veloci dades de deformación experimentados así como con modelo de rotura consi derado.

### 3.2 HIPOTESIS FUNDAMENTALES

El problema del impacto constituye un ejemplo importante que se es tudia dentro de la disciplina de la Dinámica rápida de las estructuras.

Como es conocido, las fuerzas de inercia que se generan en una estructura al desplazarse caracterizan un análisis dinámico. Ciertos tipos de acciones no impulsivas -viento, terremotos, etc.- producen efectos en una estructura que pueden ser evaluados, si ésta es lienal, de forma eficiente mediante la técnica usual de descomposición de modos o análisis modal. Este tipo de problemas dinámicos se suelen denominar inerciales frente a los típicos de la dinámica rápida que caracterizan por responder la estructura de un modo continuo, es decir, la acción dinámica se propaga a través de la estructura con una determinada velocidad. La respuesta podría determinarse de una forma muy poco eficaz con un análisis modal (aparecerían ruidos y el número de modos sería muy elevado) por lo que se hace en general preciso, un análisis de propagación de ondas. Estos problemas dinámicos de propagación caracterizan a la dinámica rápida. Si la velocidad de las ondas es importante, la respuesta de la estructura está caracterizada por las ecuaciones constitutivas (tensiones y deformaciones y sus velocidades en algunos casos) del material y la estructura. En el caso de velocidades ultrarápidas, el efecto local rige prácticamente la respuesta de la estructura, y aparecen en muchos casos cambios de fase en los materiales. En estas situaciones comunes en balística, las características locales del material que interviene en la colisión determina el fenómeno y la geometría de la estructura pierde su importancia.

En el caso de colisión de barcos con pilas, la velocidad del impacto es lo suficientemente elevada para considerar la geometría y características de los materiales que intervienen en el choque. Sin embargo no se tendrán en cuenta, los fenómenos de cambio de estado (comportamiento cuasi hidrodinámico) de los mismos.

El estudio de la dinámica del choque se lleva a cabo utilizando los recursos de la mecánica de los medios continuos. El planteamiento debe de tener en cuenta las no linealidades producidas por los grandes movimientos y deformaciones en la estructura así como los cambios de comportamiento del material.

Básicamente la ecuación dinámica del movimiento es:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{C} \dot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = \underline{F} \quad (3.1)$$

en donde  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  y  $\underline{K}$  son respectivamente las matrices de masas, amortiguamiento y rigidez de sistemas, y en general no constantes.

Los vectores  $\underline{x}$ ,  $\dot{\underline{x}}$  y  $\ddot{\underline{x}}$  representan los movimientos, velocidades y aceleraciones en todos los grados de libertad que definen la estructura.

Finalmente  $\underline{F}$  es la fuerza exterior aplicada a la fuerza de contacto.

La reducción del comportamiento de una estructura compleja y continua a la ecuación discreta (3.1), ha sido posible, en las últimas décadas, merced al desarrollo del método de los elementos finitos, de tal forma que se puede considerar todo tipo de cambios geométricos, detalles y cargas sin adicional dificultad. Se puede acomodar dentro de una formulación en elementos finitos grandes deformaciones, cambios de material, fuerzas de contacto, efectos de la velocidad de deformación, endurecimiento, etc. En el Apéndice A se resume la formulación del problema no lineal en una estructura continua y la técnica de discretización en elementos finitos.

Existen varios procedimientos numéricos de resolución de la ecuación (3.1). En general son técnicas en diferencias en el tiempo (explícitas o implícitas) que permiten calcular la respuesta del sistema paso a paso. Si se modeliza la estructura de modo que la matriz de masas sea diagonal se podrán resolver las ecuaciones (3.1) a nivel de elemento por elemento. También es posible en un esquema de diferencias finitas poner al día a comienzo del intervalo de tiempo las matrices de rigidez y las leyes constitutivas del material con los valores de las deformaciones y movimientos obtenidos en el intervalo del tiempo anterior.

Se comprende que es preciso disponer de un programa de cálculo por ordenador, que no sólo resuelva la ecuación (3.1) sino que organice de un modo ordenado la salida de resultados mediante los oportunos post-procesadores (historias temporales, contornos de resultados, etc.) y generar adecuadamente el volumen considerable de datos que precisa un método en elementos finitos (preprocesadores). En el momento actual existen un número importante de paquetes de programas que permiten llevar a cabo un análisis dinámico del impacto. Algunos se iniciaron restringidos a las estructuras bidimensionales (2-D), tales como HONDO, WAVE, DYNA 2D. En época reciente, aparecen programas que analizan estructuras 3-D generales, como DYNA 3D, PISCES, MARC, ADINA, PR3D, etc. Si bien las técnicas de resolución de las ecuaciones dinámicas (3.1) no presentan problemas insuperables, la principal dificultad de utilización de los programas de computador citados -particularmente los correspondientes a estructuras 3-D- corresponde a su inherente elevado coste de computación. Por ello, generalmente en fase de diseño se suele evitar los costosos cálculos dinámicos, de las diferentes soluciones que sucesivamente se consideran y

sólo se aplica para la estructura elegida en el proyecto definitivo. Las soluciones intermedias generadas en el proceso de diseño se calculan mediante procedimientos aproximados.

En los apartados que siguen se comentan las técnicas usuales seguidas en la discretización de las ecuaciones, que proporciona la mecánica de los medios continuos en el tratamiento del problema del impacto. Estas ecuaciones se sumarizan en el apéndice A. En particular, y con relación al método de los elementos finitos, que es el adoptado por su versatilidad y generalidad, se describen los procedimientos específicos de simulación del fenómeno impacto-contacto. En el apéndice B se muestra una de las posibilidades mas eficaces en la actualidad, desarrollado por Hallquist (2). A continuación se exponen los distintos aspectos de la simulación numérica del comportamiento dinámico del impacto de cuerpos continuos. Finalmente se mencionan las características específicas de los modelos bi y tridimensionales existentes. En esta exposición se seguira, en especial, la excelente revisión de Zukas (3). En el apéndice C se relacionan los programas de computador, sus potencialidades y organizaciones encargadas de su desarrollo y documentación asequible. Por último se comentan en el Apendice D algunos aspectos de la interacción estructura y del agua.

### 3.3 METODOS DE DISCRETIZACION

En el análisis por computador es preciso sustituir el sistema físico continuo por otro discreto, es decir, el continuo se modeliza en una malla de cálculo. Existen dos técnicas de discretización usadas normalmente: diferencias finitas y elementos finitos.

El desarrollo de las dos técnicas anteriores siguieron direcciones opuestas. El método en diferencias finitas, se inició antes históricamente que el de los elementos finitos, y principalmente en el tratamiento de problemas de impacto en altas velocidades. Por el contrario el comienzo del método de los elementos finitos se dirigió al análisis de estructuras arbitrarias bajo cargas estáticas. Actualmente ambos métodos pueden manejar todo el rango de situaciones estructurales.

En el método de las diferencias finitas se construyen mallas en el tiempo y en el espacio, mediante sustitución de las derivadas que aparecen en las ecuaciones de la mecánica del continuo por aproximaciones en diferencias. Las soluciones espaciales se dividen mediante los procedimientos conocidos de resolución de sistemas con un gran número de ecuaciones. Las soluciones en el tiempo se obtienen mediante integración.

En el método de los elementos finitos se transforman las ecuaciones del movimiento en una formulación funcional que se discretiza. El procedimiento se puede dividir en las siguientes etapas:

(a) División del continuo en una serie de subdominios o elementos.

Las incógnitas básicas (movimientos) se sitúan en un conjunto discreto de puntos de estos elementos y se denominan nudos.

(b) Se supone una distribución de los movimientos dentro de cada elemento, función de las incógnitas básicas.

(c) Se obtiene a partir del impacto de movimientos supuesto, el cam



po de deformaciones y usando las condiciones constitutivas del material, se deduce el campo de tensiones.

(d) Utilizando la formulación variacional de las ecuaciones del movimiento se pueden calcular mediante una técnica de Ritz o Galerkin, las ecuaciones directas en el espacio del problema, función de las incógnitas básicas o movimientos de los nudos.

(e) Resueltas las ecuaciones (de equilibrio) anteriores se determinan los campos de movimientos, deformaciones y tensiones en la estructura.

Las ventajas del método de los elementos finitos estriba en su facilidad en el tratamiento de estructuras de geometría irregular y compuesta de materiales no homogéneos. Exige como contrapartida, frente al método de las diferencias finitas, una mayor elaboración de los datos, en particular, los referentes a la conexión entre elementos. No obstante desde el punto de vista actual, existe una identidad profunda entre ambos procedimientos de discretización. Ver a este respecto (4).

### 3.4 DESCRIPCIONES DE LAS MALLAS

Existen dos grandes categorías de programas de computador para estudio del impacto: lagrangianos y eulerianos. Los primeros siguen el movimiento de elementos fijos de masas (partículas) con la malla de cálculo fija con el material y se distorsiona con él. Estos métodos lagrangianos presentan varias ventajas:

- (a) La programación se simplifica, puesto que las ecuaciones del movimiento son mas sencillas ya que no aparecen los términos convectivos.
- (b) Como contrapartida a la ventaja anterior, exige una lógica complicada de programación en la definición de comportamiento de las interfases de materiales (apertura o cierre de fisuras, rozamiento, etc). Las condiciones de contorno estacionarias en el sistema matricial de coordenadas son, sin embargo, de tratamiento muy simple.
- (c) Los materiales con memoria es decir, que requieren en la predicción de su comportamiento, el conocimiento de su historia son fácilmente y adecuadamente modelados en la formulación lagrangiana.

La figura 3.1 muestra un ejemplo de mallas lagrangianas tomado de (5). Se observa que la malla se deforma con el material, por lo que en instantes avanzados de tiempo, se pueden producir inestabilidades numéricas con la utilización de elementos distorsionales. Un remedio consiste en recurrir a la rezonificación, es decir, diseñar nuevas mallas de cálculo que se superponen a las antiguas.

Este proceso de rezonificación es complejo y costoso de programación.

Existe otra alternativa para reducir los efectos perjudiciales de la distorsión de la malla en la formulación lagrangiana que consiste en la

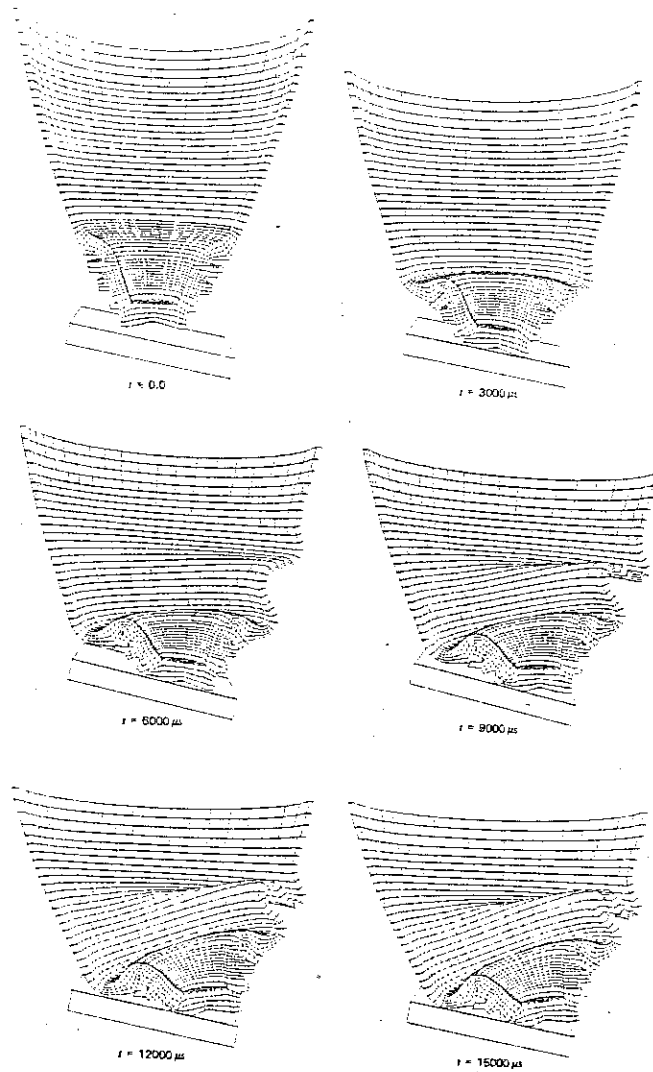


FIGURA 3.1.- Malla lagrangiana.

introducción de interfases deslizantes bien en zonas de separación entre diferentes materiales en las que se esperan deslizamientos o en regiones para la que se prevean importantes tensiones de corte y fracturas. En este procedimiento normalmente se descompone la aceleración y velocidad en las componentes tangencial y normal a la frontera de la interfase. Los movimientos en la dirección normal son continuos mientras los materiales contacten pero independientes si se encuentran separados. Los movimientos tangenciales son independientes en la situación de separación o no existe rozamiento, pero se modifican cuando los materiales estan en contacto con fricción finita. Materiales pueden separarse o volver a colisionar, si estaban separados, supuesto que se traspasan determinados límites.

Los métodos eulerianos, al suponer fija en el espacio la malla de cálculo mientras las partículas circulan por el, permite tratar adecuadamente problemas con importantes distorsiones. Sin embargo, problemas de fronteras libres y de interfases entre materiales sólo pueden ser analizados dentro de la aproximación de la malla, con las inherentes dificultades de difusión. Por otra parte no es posible obtener historias temporales del material.

Se comprende de la exposición anterior que no existe un procedimiento universal que permita tratar todas las situaciones. Por ello han aparecido técnicas de cálculo mixtas o híbridas. Existen muchas variaciones. Una de las mas usadas es considerar trazadores lagrangianos de partículas en modelos eulerianos. Otros, utilizan técnicas eulerianas al comienzo del impacto, en el que normalmente se generan las distorsiones mas importantes

y continúan con técnicas lagrangianas. A veces ambos procedimientos de cálculo se llevan a cabo en paralelo. En el artículo (b) se revisan todas estas posibilidades.

### 3.5 ESQUEMAS DE INTEGRACION EN EL TIEMPO

Las ecuaciones dinámicas del movimiento (3.1) pueden ser integradas de diferentes formas. Generalmente se utilizan diferencias finitas en el tiempo. Los métodos pueden ser implícitos o explícitos. En este último tipo de procesos de diferencias, el vector de estado en un instante  $t$ , definido por  $\{\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t) \text{ y } \ddot{\underline{x}}(t)\}$ , se puede expresar en función de las aceleraciones de instantes anteriores a  $t$ . Por el contrario en un esquema implícito en diferencias, el vector de estado al tiempo  $t$ , se obtiene no solo como función de las aceleraciones pasadas sino de la aceleración en el instante de estudio  $t$ . Las relaciones entre velocidad, movimientos y aceleraciones tiene que combinarse con las ecuaciones del movimiento (3.1) y el sistema resultante de ecuaciones se resuelve en movimientos. Generalamente se utiliza alguna técnica de linealización.

Los procedimientos explícitos en diferencias son de programación directa, puesto que en cada instante  $t$ , las velocidades y movimientos son conocidos. A partir de las velocidades de deformación se pueden calcular las tensiones y las relaciones deformación-movimiento a partir de las ecuaciones constitutivas. La aceleración en el instante  $t$  se deduce mediante la ecuación del movimiento, la cual con los movimientos y velocidades, constituye el vector de estado que permite obtener los nuevos mo-

vimientos en un instante próximo posterior y todo el proceso vuelve a repetirse.

Los esquemas de predicción y corrección, o la que utilizan fórmulas del trapecio como el método de Houbolt así como los de  $\theta$  de Wilson y  $\beta$  de Newmark son utilizados frecuentemente en el análisis en diferencias finitas temporales de la ecuación (3.1).

Un criterio importante en la elección del esquema en diferencias corresponde a la estabilidad. La respuesta dinámica puede ser inestable, es decir, crecer sin límite, en esquemas explícitos si no se adopta un intervalo de tiempo suficientemente pequeño. En los sistemas lineales este paso temporal  $\Delta t$  debe satisfacer la condición:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda} \quad (3.2)$$

siendo  $\lambda$  la mayor frecuencia natural de la malla.

En los sistemas no lineales, se suele adoptar la regla empírica siguiente:

$$\Delta t \leq \frac{k L}{c} \quad (3.3)$$

con  $L$  la dimensión mínima de la malla de cálculo,  $c$  la velocidad del sonido y  $k$  un factor menor de la unidad (generalmente entre 0,6 y 0,8).

Los métodos implícitos son incondicionalmente estables. No es preciso por razones de estabilidad limitar el intervalo  $\Delta t$ , si bien pueden exis

tir criterios de convergencia a la solución exacta. Por otra parte, cada paso de cálculo en un esquema implícito, exige un tiempo de computación (resolución del sistema) elevado. Los errores de truncadura en ambos tipos de esquemas son del orden de  $\Delta t^3$ , por lo que, las consideraciones de convergencia exigen que el intervalo  $\Delta t$  a utilizar en los métodos implícitos no sea mucho mas largo que en los implícitos. Por ello, estos últimos, suelen ser utilizados raramente en la resolución de los problemas de impacto.

### 3.6 REQUISITOS DE COMPUTACION

Las soluciones numéricas de problemas de impacto precisan unas mallas de cálculo muy refinadas. Ello es debido a la presencia de un gran contenido de altas frecuencias de las soluciones y la existencia de zonas del material con elevados gradientes de tensiones. Mallas con un número de elementos del orden de 5.000 son frecuentes en la práctica del análisis del impacto 2-D. La situación en el caso del choque tridimensional exige una resolución muy grande de la malla, entre 20.000 y 50.000 elementos, en situaciones reales. Un número menor de elementos, puede representar errores significativos en la predicción de los resultados (errores del 40% por ejemplo para mallas de 12.000 en lugar de 25.000 elementos ha sido reportados en (7). Análisis que intentan simular fracturas avanzadas pueden exigir resoluciones de malla mayores. No existe en la actualidad un procedimiento para deducir la malla y tamaño óptimo de modelización de un problema de impacto. Trabajos recientes reportados en (8) son intentos en esta dirección importante de investigación.

Los costes de cálculo suelen ser muy elevados para problemas de producción. Mallas de 6.000 elementos exigen en problemas 2-D del orden de horas de computador CDC-7600. Problemas 3-D necesitan en su resolución hasta decenas de horas de CPU del mismo tipo de computador. Existen además problemas de memoria. La mayoría de los problemas de impacto no pueden ser resueltos totalmente en memoria central, por lo que la transferencia de información a y desde la memoria central constituye otro factor que incrementa extraordinariamente el tiempo de cálculo. Actualmente con los ordenadores de arquitectura vectorial como el CRAY-1, algunas de las dificultades anteriores se mitigan, si bien, el acceso a este tipo de supercomputadores es ciertamente limitado, al menos en nuestro país.

Los tiempos para la programación de datos y la interpretación de resultados, que serían los apartados, con mucho, más costosos si se evaluase en horas-hombre exige la disponibilidad de programas adecuados de pre y postprocesadores ya comentados.

### 3.7 MODELO DEL MATERIAL

La importancia de caracterizar los materiales involucrados en el impacto no puede ser en ningún caso disminuida. Una modelización del comportamiento macroscópico del material apropiado al tipo de problema de choque que se estudia conduce a excelentes resultados. Ensayos simples y la identificación de los parámetros correspondientes permiten obtener esta caracterización del material. Sin embargo, la mayor limitación existente en el cálculo del impacto reside en la modelización adecuada de la rotura del material.



Se suele diferenciar dentro de los programas de estudio del fenómeno del choque entre la deformación volumétrica y la desviatoria (por corte) del material. Ambas se suelen tratar separadamente, admitiendo que no están fuertemente correlacionadas.

El comportamiento volumétrico se describe mediante una ecuación de estado, que relaciona la presión, el volumen y algún parámetro térmico (normalmente la energía interna o la temperatura). En los programas de computador modernos, con una estructura modular, la ecuación de estado puede ser modificada y cambiada por otra fácilmente a voluntad del usuario. Se suele utilizar para metales la ecuación de estado de Mic-Gruneisen. En general, la importancia de la ecuación de estado en los problemas de choque de embarcaciones contra objetos fijos es de importancia secundaria, y sólo es relevante, en los problemas de balística. Por lo tanto, se puede concluir que en el desarrollo técnico actual las ecuaciones de estado disponibles son adecuadas para la mayoría de las necesidades actuales y en especial, en el tema que se estudia del impacto de barcos contra pilas.

Situación distinta corresponde a la respuesta de los materiales a la acción del cortante. Se utiliza frecuentemente una formulación incremental elasto-plástica. Las descripciones plásticas se suelen basar en una hipotética descomposición del tensor velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$  en dos partes, elástica y plástica:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (3.3)$$

en conjunción con la incompresibilidad de la parte plástica:

$$\dot{e}_{11}^p + \dot{e}_{22}^p + \dot{e}_{33}^p = 0 \quad (3.4)$$

se suelen utilizar los criterios de plastificación de Von Mises y la teoría incremental de Prandtl-Reuss, si bien su aplicación a problemas con importante penetración en el choque puede ser cuestionada.

La tesis doctoral (9) revisa exhaustivamente los modelos plásticos en metales y el reciente congreso (10) presenta el estado del arte en relación con los modelos constitutivos plásticos en el hormigón.

### 3.8 CAPACIDAD EXISTENTE DE CALCULO AUTOMATIZADO

#### 3.8.1 Programas lagrangianos bidimensionales

Los programas en diferencias finitas utilizados actualmente son el HEMP desarrollado por Wilkins del Lawrence Livermore Laboratory y el TOODY/TOOREZ escrito por Bertholf y sus colaboradores en Sandia Laboratories. Ambos son similares y emplean esquemas en diferencias finitas de segundo orden, muy aproximados.

El programa HEMP (Hydrodynamic, Elastic, Magneto and Plastic) usa una malla de cuadriláteros y puede ser resuelta en coordenadas cartesianas o cilíndricas. Existen líneas de deslizamiento y la posibilidad de apertura y cierre de fisuras. Los contornos pueden ser estacionarios o móviles, libres o fijos. Se pueden especificar condiciones iniciales

de velocidad o en presiones, así como la malla de cálculo, si bien en este caso, es posible, con un mínimo de entrada de datos generarla automáticamente. El programa está implementado en numerosos tipos de máquinas, si bien los ordenadores CDC parecen más adecuados para su instalación. Existen diversas derivaciones de este programa, como la familia de programas PISCES comercializados por Physics International a través de la red informática Cybernet. Los programas CRAM y SHEP son otros ejemplos de este tipo. Todos ellos se diferencian únicamente en las posibilidades de implementación de diferentes ordenadores y en los pre y post-procesadores.

El programa TOODY-TOOREZ se presenta con cierto detalle en (11). Las características son muy semejantes a las comentadas para el HEMP.

Un programa bidimensional basado en el método de los elementos finitos corresponde al EPIC-2 (Elastic Plastic Impact Calculations en 2 dimensiones). El programa es capaz de tratar problemas de propagación de ondas y flujo elasto-plástico. Contiene una amplia gama de descripciones de materiales que incluyen los efectos de endurecimiento, velocidad de deformación, fractura, emblandecimiento térmico entre otros. Existen generadores automáticos de geometrías sencillas así como un rudimentario postprocesador que dibuja los resultados de interés geométricos inicial y deformados, tensiones efectivas, presiones, campos de velocidad. Puede asimismo obtenerse las historias temporales de los distintos parámetros y resultados del sistema.

### 3.2.2 Programas eulerianos bidimensionales

Los dos programas mas conocidos de cálculo del impacto basados en la descripción euleriana del continuo son el HELP y HULL. Ambos contienen las características deseables del planteamiento euleriano y permite tratar interfases de material y fronteras.

El programa HELP se muestra en una versión avanzada en (12) y se basa en un esquema en diferencias finitas de primer orden que a veces plantea problemas numéricos. Su utilización extensiva ha sido en la solución de problemas hidrodinámicos y elasto-plásticos. El programa si bien es de naturaleza euleriana, permite manejar interfases de material y superficies libres de manera lagrangiana. Los criterios de fallo de material incorporados son relativamente primitivos si bien se han incluido algunos mejores. Un importante inconveniente es la dificultad de introducir modificaciones en el programa ya que carece su programación del carácter modular.

El programa HULL presenta una larga historia. Inicialmente fué desarrollado en 1971, por Matuska y Dusset en el Air Force Weapons Laboratory. Mas reciente se ha revisado de un modo substancial, permitiendo a este programa tratar fenómenos elasto-plásticos y materiales muy diversos, desde su endurecimiento hasta fluidos y gases. Se utilizan trazadores pasivos lagrangianos pero la definición de fronteras se lleva a cabo en HULL mediante un esquema que limita la difusión. Es un programa que conduce a excelentes resultados y está implementado en la mayoría de las marcas de computadores actuales. Su documentación es

escasa, siendo de interés en esta dirección las referencias (13) y (14). Otro programa muy semejante al HELP es el DORF, (15) y (16), que se utiliza frecuentemente en conjunción con el TOODY como guía en las operaciones de resonificación.

### 3.8.3 Programas tridimensionales

Numerosos programas 2-D se han extendido con objeto de trátar problemas de impacto 3-D. Otros se han desarrollado directamente. Actualmente constituye un área de gran intensidad de investiación y desarrollo. Aquí sólo se citaran algunos de los mas importantes.

El programa HEMP 3D que se describe en (17) es un desarrollo del bidimensional HEMP y se ha diseñado para resolver problemas de mecánica de los sólidos que incluyen comportamiento del material dinámico plástico y con fluencia. Se basa en una formulación incremental para el comportamiento elasto-plástico, con un criterio de flujo de von Mises. Introduce, como es usual, una viscosidad artificial para evitar los problemas asociados con la onda de choque.

Los dos programas TRIOIL y TRIDOLF ha sido desarrollado por Johnson (18) y tiene como programas predecesores el OIL y DORF. Semejante en espiritu es el METRIC, escrito por Hageman y otros (19), que utiliza métodos numéricos y descripciones del material semejantes a los del HELP. Este programa utiliza celdas mixtas, es decir, celdas conteniendo mas de un material con objeto de establecer contornos materiales, si bien actualmente utiliza como en el HELP trazadores de particulas sin masa.

Un desarrollo independiente, comercializado por Control Data de España corresponde al programa PR3D (20). Es un programa basado en un esquema en diferencias finitas centrales explícitas en el tiempo y en el espacio. El espacio se ha discretizado en tetraedros en la consideración de las deformaciones deviatorias y pentaedros en las deformaciones volumétricas. Se plantea en una formulación lagrangiana con una discretización mixta. Los resultados obtenidos son adecuados y se encuentra el programa en sucesivas fases de mejoras e incorporación de nuevas potencialidades de cálculo.

Un programa basado en una formulación lagrangiana en elementos finitos tetraedricos con masas concentradas es el EPIC-3. Las ecuaciones del movimiento se integran, como en el EPIC-2 directamente sin construir la rigidez total del sistema. Constituye un programa muy completo, que ha mejorado desde sus inicios por Johnson (21) y (22), de modo que es posible tratar simultaneamente materiales metálicos, geológicos, hormigón, etc. Su programación es estructurada y planteada para ser eficaz tanto en computadores relativamente pequeños como en los supercomputadores de la cuarta generación, con sus características de arquitectura vectorial. Problemas pequeños se resuelven automáticamente en memoria central y sin embargo utiliza almacenaje externo en el caso de problemas de gran dimensión. Por otra parte este programa dispone de unos excelentes pres y post procesadores, así como la potencialidad de considerar superficies deslizantes con rozamiento, que facilita y extiende su área de utilización.

Los desarrollos recientes de Hallquist en el Lawrence Livermore Laboratory son dignos de mencionarse. Utilizando elementos finitos de dife

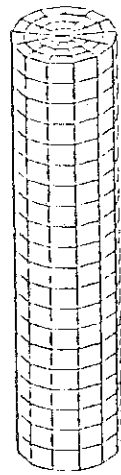
rentes tipos o bien esquemas en diferencias finitas basadas en las ecuaciones en diferencias de HEMP, ha escrito los programas bi y tridimensionales NIKE2D y NIKE3D, que resuelven las ecuaciones del movimiento en un planteamiento implícito. Los programas DYNA2D y DINA3D, también desarrollados por Hallquist se basan, por el contrario, en una integración explícita de las ecuaciones del movimiento. Merece destacarse la implementación en estos programas de una capacidad general de líneas de deslizamiento con rozamiento, cuyo algoritmo puede verse en (21). Algunos resultados obtenidos con estos códigos se muestran en las figuras 3.1 a 3.6. En el apéndice C se relacionan sumariamente las principales características de los programas tridimensionales de choque, así como el organismo o personas que lo han desarrollado.

### 3.9 POSIBLES DESARROLLOS FUTUROS

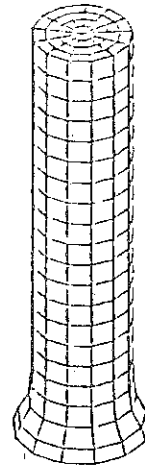
Antes de asumir el riesgo de indicar algunas opiniones sobre los desarrollos en un futuro cercano conviene resumir el estado del arte del problema del impacto.

(a) El estudio del fenómeno del impacto presenta un carácter interdisciplinar.

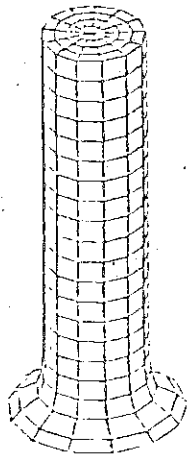
(b) Las técnicas numéricas ofrecen la esperanza de obtener una solución completa de los problemas de impacto. Estas técnicas han avanzado hasta el extremo de que se pueden analizar situaciones muy complejas de un modo eficiente en términos de tiempo y economía.



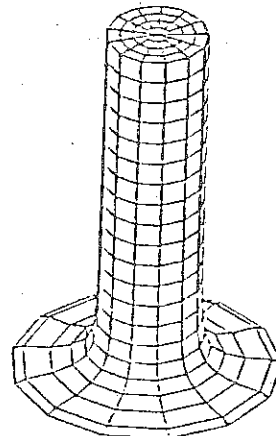
a) 1  $\mu$ sec



b) 2.5  $\mu$ sec



c) 10.0  $\mu$ sec



d) 25.0  $\mu$ sec

FIGURA 3.2 - Deformaciones del impacto vertical de un cilindro. (Referencia 21).



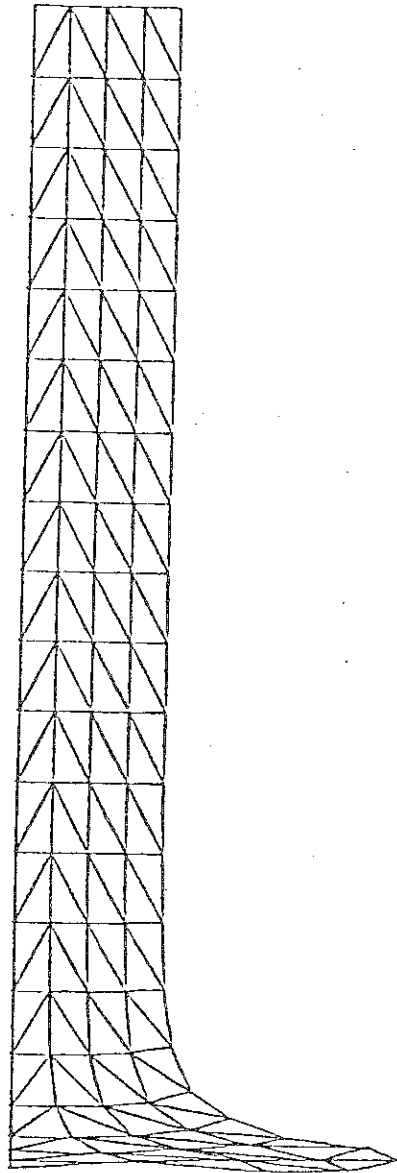


FIGURA 3.3.- Deformaciones internas en la sección del cilindro de la figura 3.2 después de 25 m/seg. del impacto.

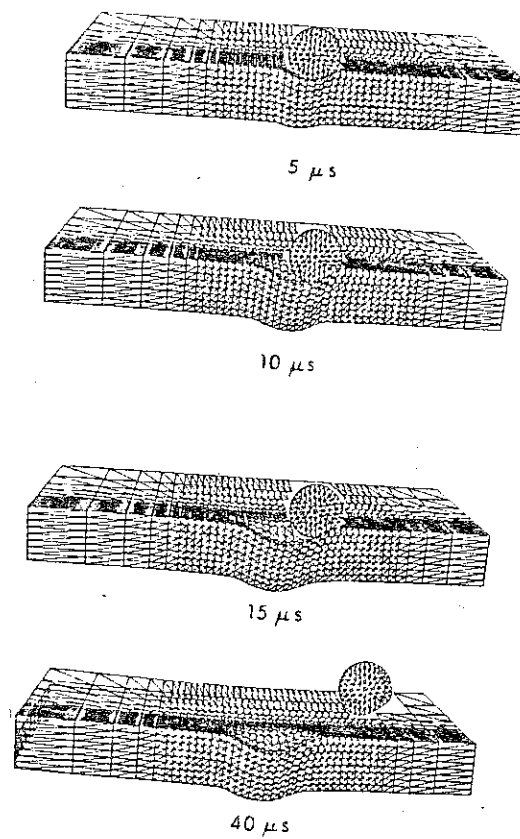


FIGURA 3.4.- Perfiles de deformación del impacto oblicuo de una esfera contra un objetivo de aluminio. (Referencia 3).

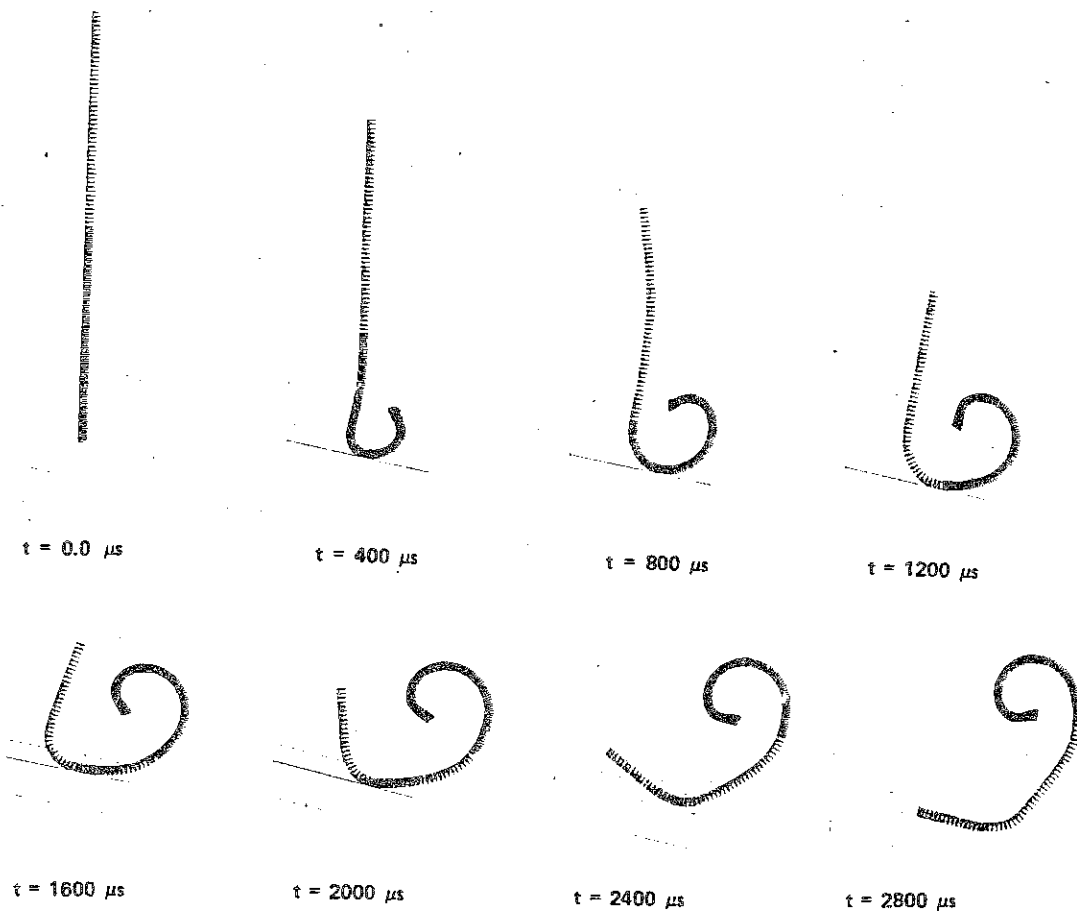


FIGURA 3.5.- Impacto de una barra contra una pared oblicua rígida. (Referencia 23).

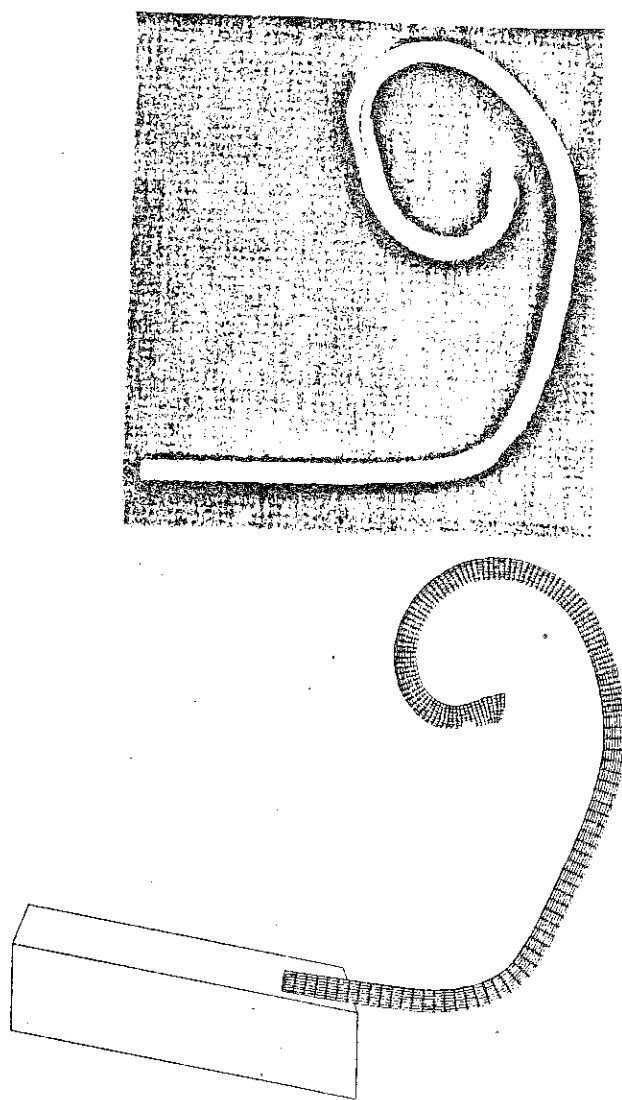


FIGURA 3.6.- Perfiles: (a) experimento y  
(b) cálculo.

(c) La complicación de la geometría de los cuerpos que chocan no supone un obstáculo para el cálculo. Situaciones, para los que el fallo del material no es efecto fundamental, se pueden calcular mediante modelos de material sencillos obteniéndose resultados excelentes tanto cualitativo como cuantitativos. Esto es particularmente cierto, si se adoptan precauciones para caracterizar los materiales involucrados en el impacto bajo las condiciones dinámicas apropiadas.

En definitiva, es posible obtener una solución ingenieril de cualquier problema de impacto en regimen de bajas y medias velocidades, si se dispone de un potente computador, datos dinámicos de los materiales y la posibilidad efectuar ensayos simples de choque. Ante esta situación, ¿cuáles son las mejoras que cabe esperar en un futuro próximo?.

La situación probable con respecto al computador es sencilla de predecir. Mayor capacidad de cálculo y menores costes. El ordenador CRAY-1 operacional en diferentes sitios es del orden de 7 a 10 veces mas rápido que el CDC-7600 para problemas comparables. Esto significa que en un futuro cercano los cálculos tridimensionales de impacto se podrán llevar a cabo en tiempos de CPU inferiores a una hora.

Por otra parte, existe una actividad creciente en la elaboración de programas mas exactos y rápidos que incluyan tensiones y gradientes de velocidades elevadas. El trabajo de Hallquist ha sido ya citado. Hicks en Sandia Laboratories ha desarrollado técnicas de ajustes en el cálculo de impacto bidimensional e intenta extenderla a situaciones 3-D. En ge

neral se observa que únicamente una parte pequeña de la malla (zonas activas) sufre gradientes elevados de tensiones y deformaciones y particularmente en las fases iniciales del choque. Dos direcciones son prometedoras en este sentido. Una de ellas, consiste en utilizar diferentes interválos temporales  $\Delta t$  para las zonas activas (con malla pe queña) y mayores en las zonas no activas. De esta forma se puede conseguir la convergencia y estabilidad en el cálculo con costes de compu tación del orden de 1/20 del correspondiente a un esquema implícito en un problema 3-D. Otras tentativas se dirigen a utilizar sucesivamente esquemas en diferencias explícitas e implícitas. Las primeras en los instantes primeros después del choque y los últimos en la fase final, para la que no aparecen componentes con altas frecuencias y por lo que los valores del paso de tiempo ( $\Delta t$ ) pueden ser mas elevados.

El desarrollo de logicales de pre y postprocesadores disminuirán los costes actuales de horas-hombre. Gráficos interactivos, generación automática de mallas y análisis gráfico de resultados constituyen posi bilidades costosas ahora pero que reducen horas de analista. Se puede predecir que programas que exigen tiempo de analista y usuario tenderán a desaparecer gradualmente. No es justificable económicamente situaciones que exigen varias semanas de preparación de entrada de datos e interpretación de los resultados frente al cálculo de pocos minutos en el ordenador. A este respecto el computador personal jugará un importante papel, puesto que pueden ser utilizados como terminales inte ligentes de gran computador y que elaboran los datos y resultados mediante los correspondientes pre y post-procesadores. De un modo alter nativo, los computadores personales pueden ser utilizados para efectuar

por ellos mismos todo el análisis. Si bien mucho mas lentos que los actuales instalaciones de grandes computadores, la utilización exclusiva de uno de ellos en un programa particular puede estar justificada en términos de ahorro en horas-hombre y dinero. Existen versiones de programas de impacto como el HEMP y TOODY operacionales en minicomputadores.

La prognosis descrita acerca del cálculo numérico del impacto impulsará sin duda alguna el desarrollo de banco de datos de características dinámicas de materiales así como modelos de sus ecuaciones constitutivas. Esta tarea importante constituye el punto mas sensitivo del análisis del fenómeno del choque.

Por último solo recordar que aisladamente ni los ensayos, ni los cálculos numéricos en computador ni la adecuada caracterización de los materiales, pueden por sí solos permitir la adecuada comprensión de la complejidad del problema del choque, particularmente a altas velocidades. Es en el desarrollo conjunto y equilibrado de estas tres facetas de la investigación, como se lograra alcanzar un entendimiento y comprensión de la respuesta de las estructuras a cargas intensas impulsivas.

## REFERENCIAS

- (1) BERTHOLF, L.D. et al, "Damage in Steel Plates from Hypervelocity Impact. II. Numerical Results and Spall Measurement", J. Appl. Phys., V46, #9, pp 3776-3783, September 1975.
- (2) HALLQUIST, J.O. "Theoretical Manual for DYNA3D". Lawrence Livermore Laboratory. Marzo (1983).
- (3) ZUKAS, J.A. "Impact Dynamics". en "The Aerospace Conference Century 2 Emerging Technology Conferences". San Francisco, California (1980).
- (4) ZIENCKIEWICZ, O.C. y MORGAN, K. "Finite Elements and Approximation". John Wiley and Sons. (1983).
- (5) HALLQUIST, J.O. "Lawrence Livermore Laboratory UCRL-52678 (1979).
- (6) HERRMANN, W., "Nonlinear Transient Response of Solids", Shock and Vibration Computer Programas, Reviews and Summaries, ed. W. and B. Pilkey, Shock and Vibration Information Center, Naval Research Laboratory, Washington, DC, 1975.
- (7) JONAS, G.H. and ZUKAS, J.A., "Mechanics of Penetration: Analysis and Experiment", Int. J. Engng. Sci., V16, pp 879-903, 1978.
- (8) WELLY, D.W., GAGO, J.P. de J.R., ZIENCKIEWICZ, O.C. y BABUSKA, I. "A posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in Finite Element Method. Parts I- Error Analysis. Parts II- Adaptive-Mesh Refinement". Int. Journ. Num. Meth. in Eng. Vol 19. Num 11 (1983).

- (9) AXELSSON, K. "On constitutive modelling in metal plasticity". Publication 79:2. Dept. of Struc. Mech. Chalmers University of Technology. Göteborg (1979).
- (10) "Concrete Structures under impact and impulsive loading". Rilem - CEB-IABSE-IASS-BAM. Berlin (1982).
- (11) WALSH, R.T., "Finite-Difference Methods". Dynamic Response of Materials to Intense Impulsive Loading, ed. P.C. Chou and A.K. Hopkins, US Government Printing Office, 1972.
- (12) HAGEMAN, L.J., WILKINS, D.E., SEDGWICK, R.T., and WADDELL, J.L., "HELP, A Multi-Material Eulerian Program for Compressible Fluid and Elastic-Plastic Flows in Two Space Dimensions and Time," Systems Science and Software, Inc., (1975).
- (13) DURRETT, R.E. and MATUSKA, D.A., "The HULL Code. Finite Difference Solution to the Equations of Continuum Mechanics," Air Force Armament Laboratory, AFATL-TR-78-125, 1978.
- (14) GABY, L.P., "HULL System Guide", Air Force Weapons Laboratory, C4-C-4041, 1978.
- (15) JOHNSON, W.E., "Code Correlation Study". Air Force Weapons Laboratory, AFWL-TR-70-144, 1971.
- (16) JOHNSON, W.E., "Development and Application of Computer Programs to Hypervelocity Impact," Systems, Science and Software, Inc., 3SR-749, (1971).



- (17) WILKINS, M.L., BLUM, R.E., CRONSHAGEN, E., and GRANTHAM, P., "A Method for Computer Simulation of Problems in Solid Mechanics and Gas Dynamics in Three Dimensions and Time," Lawrence Livermore Laboratory, UCRL-51574, Rev. 1, 1975.
- (18) JOHNSON, W.E., "TRIOIL - A Three-Dimensional Version of the OIL Code", General Atomic, GAMD-7310, (1976).
- (19) HAGEMAN, L.J. and LEE, E.P., "Development of Ordnance Velocity Multimaterial, Three-Dimensional Perforation Code for Finite Plates, USA Ballistic Research Laboratory, BRL-CR-305, 1976.
- (20) MARTI, J. y CUNDALL, P.A. "Mixed Discretisation Procedure for Accurate Modelling of Plastic Collapse" Int. Journ. for Num. and Analyt. Meth. in Geomech. (1981).
- (21) JOHNSON, G.R., "EPIC-3, A Computer Program for Elastic-Plastic Impact Calculations in 3 Dimensions". USA Ballistic Research Laboratory, BRL-CR-343, 1977.
- (22) HALLQUIST, J.O., "A Numerical Treatment of Sliding Interfaces and Impact," Computational Techniques for Interface Problems, ed. K.C. Park and D.K. Gartling, AMD -Vol. 30, ASME, NY, 1978.
- (23) HALLQUIST, J.O., "Users Manuals for DYNA 3D and DYNAP" Lawrence Livermore Laboratory. UCID-19156, (1981).

## CAPITULO 4.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES DE TRABAJO

### 4.1 COMENTARIOS GENERALES

El análisis estructural del impacto de un buque contra la pila de un puente ó contra unas defensas que protegen la estructura pueden, en el estado actual del conocimiento, ser realizado con un elevado grado de precisión, supuestas conocidas las características del buque (geometría, velocidad, etc.), el ángulo de choque y las condiciones constitutivas de los materiales. En efecto, el nivel de conocimientos alcanzados en el área del cálculo de las estructuras, el grado de sofisticación de las técnicas numéricas de resolución de los problemas físicos de campo, así como la potencia alcanzada en los modernos computadores, potencia medidas en términos de capacidad de almacenamiento y velocidad de cálculo, han hecho posible el tratamiento adecuado, mediante modelos matemáticos, de fenómenos físicos complejos cuyo planteamiento y resolución era inconcebible hace apenas una década. El problema del impacto dinámico constituye un ejemplo característico de esta situación.

Sin embargo, el planteamiento tridimensional completo de la acción del choque de una embarcación contra una pila no puede ser utilizado en las primeras etapas del diseño como método de comprobación principalmente por las importantes demandas que exige de memoria de ordenador y el coste importante de computación. Este último aspecto será cada vez un problema menor con la llegada de la nueva generación de computadores. Los programas actuales son de un valor insustituible para el estudio fenomenológico del impacto pero no pueden todavía ser considerados como

una herramienta de trabajo durante el proceso de diseño de las defensas y pilas de un puente de las características precisas para cruzar el Estrecho de Gibraltar. En este proyecto extraordinario sería deseable llevar a cabo un análisis tridimensional del impacto basado en los métodos y programas descritos en el capítulo 3, en la fase final del diseño y como comprobación de su seguridad estructural ante el evento del choque.

Por consiguiente, se comprende que la fase de concepción dimensionamiento y elaboración de detalles de un sistema de defensa de pilas en el Puente del Estrecho de Gibraltar precisa de los procedimientos aproximados de cálculo, algunos de los cuales han sido resumidos en el capítulo 2. Evidentemente, la necesidad de la experimentación en modelo puede ser imprescindible, como complemento y corroboración de las hipótesis y simplificaciones, introducidas en el análisis aproximadas durante las distintas fases del proyecto.

Una situación intermedia entre un cálculo exacto y otro aproximado, consiste en llevar a cabo un análisis bidimensional exacto. Este procedimiento reduce de un modo importante el esfuerzo de cálculo, al disminuir la dimensionalidad del problema. Constituye una aproximación bastante común, en otras tecnologías, como en Centrales Nucleares (análisis bidimensional en deformación plana o como sólido de revolución del edificio de contención) y su validez ha sido comentada en (1) en relación con la problemática específica del impacto. Evidentemente existen tipos de choques, para los que esta aproximación es adecuada, particularmente en el caso de choques centrales, es decir, no oblicuos. En otras situacio-

nes, se hace preciso efectuar estudios que relacionen los resultados de deformación plana con los exactos tridimensionales. El interés de estas correlaciones es evidente puesto que el coste de un cálculo 2-D es aproximadamente un cuarto del 3-D. No obstante y de acuerdo con Zukas (1) se puede afirmar que incluso con un análisis bidimensional se puede obtener una importante cantidad de resultados cualitativos acerca del comportamiento estructural en un choque oblicuo, y si se utiliza con precaución pueda aprovecharse en estudios paramétricos. En los instantes inmediatamente después del impacto se pueden deducir resultados cuantitativos razonables sobre deformaciones de los sólidos involucrados, sin embargo, no es posible la extrapolación de los resultados referentes a variables locales (tensiones, deformaciones y temperaturas). Estos deben ser obtenidos mediante un análisis 3-D y utilizando una adecuada caracterización para los materiales.

Existe otra alternativa a la disyuntiva entre un cálculo quasi-estático o lineal dinámico y un análisis dinámico no lineal tridimensional. Esta ha sido desarrollada dentro de la tecnología de los contenedores de residuos radioactivos procedentes de centrales nucleares, que deben de ser comprobados ante la situación de accidente, mediante un ensayo numérico o experimental de caída libre desde 10 metros. Esta alternativa de cálculo, por su interés y aplicación al cálculo de defensas de estructuras ante choques se expone con cierto detalle en el siguiente apartado.

Conviene tener en cuenta por último el efecto del agua, en la respuesta de los cuerpos que chocan. Este efecto se mide en forma de una

masa de agua acompañante con cada cuerpo en su movimiento y una amortiguación en la vibración. Existen como se indica en el apéndice D varias técnicas para la consideración del agua en el análisis, probablemente la utilización del elemento lagrangiano de Wilson descrito allí, merece utilizarse únicamente en el caso de un cálculo exacto bi o tri dimensional. En los otros procedimientos aproximados de análisis la simplificación de introducir masas añadidas a cada uno de los sólidos que impactan, puede resultar totalmente adecuada.

Finalmente una observación final en estos comentarios generales. La incertidumbre de algunos datos de partida (tonelaje y velocidad de las embarcaciones, ángulo de choque, etc. puede exigir, en un caso como el puente de Gibraltar, ser tratada mediante técnicas probabilísticas y en particular, los análisis podrán ser efectuados según una técnica de simulación de Montecarlos. De esta forma un análisis coste-beneficio generalizado se podría realizar y adoptar de esta forma un nivel racional del riesgo.

#### 4.2 METODO APROXIMADO. CARGA LIMITE

##### 4.2.1 Introducción

Cuando el principal objetivo del cálculo corresponde al diseño de un absorbedor del choque, es decir, de una estructura que bajo el impacto pueda absorber la mayor parte de la energía cinética antes de producir ningún daño estructural innecesario al sistema que defiende.

En esta situación, la filosofía del proyecto puede dirigirse a la búsqueda de un mecanismo esperado de colapso que pueda captar la mayoría de la energía cinética y convertirla en energía de deformación plástica antes de que tenga tiempo a "escapar" a la estructura principal que se defiende. Este procedimiento ha sido aplicado con bastante frecuencia en las industrias de coches.

Una técnica aproximada de cálculo desarrollada conjuntamente por el Imperial College de Londres y Babcock Power Limited, basada en la filosofía anterior y conocida como técnica de la carga límite se describe a continuación.

Inicialmente se calcula la estructura bajo la acción de las cargas supuestas aplicadas estáticamente. Sin embargo, debido a la naturaleza de la carga aplicada y la importancia significativa de los efectos de inercia se introduce a continuación de un modo iterativo estos efectos. Las fuerzas de inercia de la estructura se calculan a partir de la deformada obtenida al final de la primera iteración que resulta de la primera carga estática de colapso de la estructura. De esta forma, sucesivamente se va calculando de un modo estático incluyendo las fuerzas de inercia deducidas del cálculo anterior, a partir de la deformada resultante.

Los objetivos del método son:

- (1) Calcular un límite superior de la carga de colapso de la estructura.

- (2) Identificar los mecanismos de fallo de la estructura.
- (3) Evaluar la cantidad de energía del choque que puede ser absorbida mediante deformación plástica en una cierta área de la estructura.

El método de la carga límite se describe en detalle en el subapartado 4.2.2. Sin embargo, debido a los efectos de inercias de la estructura debe modificarse el método como sigue:

- (1) Calcular la carga plástica de colapso de la estructura al comienzo de la iteración, de acuerdo con 4.2.2.
- (2) Obtener el modo de deformación del colapso, relacionarlo con la aceleración nodal y calcular de ahí las fuerzas de inercia correspondientes.
- (3) Calcular la nueva carga de colapso bajo la acción suma de las fuerzas de los pasos (1) y (2).
- (4) Repetir los pasos (1) a (3) hasta alcanzar la convergencia requerida.

#### 4.2.2 Método de la carga límite

A continuación se describe someramente el procedimiento de cálculo que se utiliza en este método.

En primer lugar, el criterio de la carga límite establece que

- (1) En los elementos en tramo plástico ocurre que:

$$\sigma = \sigma_y \quad (4.1)$$

en donde  $\sigma$ , es el nivel real de la tensión del elemento.

$\sigma_y$ , es el nivel de tensión de plastificación del material.

- (2) En los elementos que no han entrado en la zona de plastificación y para los materiales rígido-plásticos se establece una matriz de - plastificación  $k_f$  (matriz de flujo del elemento) que se define más adelante.
- (3) Por último el trabajo exterior debe de equilibrar la energía de deformación interna (sus velocidades o cambios por unidad de tiempo), es decir, se cumple:

$$\dot{\underline{x}}^t \cdot \underline{p} = \sum_{\alpha} D_{\alpha} \dot{\underline{\epsilon}}^t \cdot \underline{\sigma} dv \quad (4.2)$$

siendo  $\dot{\underline{x}}$  las velocidades nodales.

$\underline{p}$  las cargas aplicadas en los nodos.

La consideración de las tres condiciones anteriores es posible obtener un límite superior de la carga límite.

Se define la matriz de flujo del elemento  $\underline{k}_f$  por la relación

$$\underline{k}_f \dot{\underline{x}} = \underline{p} \quad (4.3)$$



Conviene observar la semejanza de la ecuación (4.3) con la clásica expresión del análisis estático:

$$\underline{k}_e \underline{x} = \underline{P}$$

con  $\underline{k}_e$  la matriz de rigidez del elemento.

Se puede mostrar asimismo, que con el valor arbitrario del módulo de elasticidad, E, adecuadamente elegido y haciendo tender el coeficiente de Poisson  $\nu$  a 0,5, se cumple la relación:

$$\underline{k}_e = \underline{k}_f \quad (4.4)$$

Tras las consideraciones anteriores, se puede establecer el procedimiento de cálculo:

- (1) Aplicar un nivel de cargas suficientemente elevado, de modo que produzca la plastificación en todos los elementos, es decir, que las tensiones sean superiores de las correspondientes de plastificación del material ( $\sigma > \sigma_y$ ).
- (2) Calcular los trabajos exteriores,  $W_{ext}$ , e internos,  $W_{int}$  mediante las expresiones:

$$W_{ext} = \underline{\dot{x}}^t \cdot \underline{P} \quad (4.5)$$

$$W_{int} = \sum_e D_v \underline{\dot{\epsilon}}^t \cdot \underline{\sigma}_y dv \quad (4.6)$$

en donde para el trabajo interno debe considerarse las tensiones  $\sigma_y$  y no las realmente calculadas  $\sigma$ .

- (3) Multiplicar las cargas aplicadas por el factor  $\gamma = W_{int}/W_{ext}$ , es decir, proceder al cálculo bajo las cargas:

$$\frac{W_{int}}{W_{ext}} \cdot P$$

- (4) Para los elementos con  $\sigma < \sigma_y$  modificar su rigidez  $\gamma k_f$ , que dependerán de las diferencias  $\sigma_y - \sigma$ . Este paso produce unos elementos no en colapso más rígidos.
- (5) Resolver las ecuaciones con las nuevas rigideces y nuevas cargas.
- (6) Repetir los pasos (2) al (6) hasta que las condiciones de carga límite se satisfagan dentro de los límites requeridos.

Los cálculos estáticos anteriores pueden llevarse a cabo mediante un programa típico en elementos finitos.

#### 4.3 PROPUESTA TENTATIVA DE LA METODOLOGIA DE CALCULO DEL IMPACTO DE BUQUES CONTRA PILAS DE PUENTE SOBRE EL ESTRECHO DE GIBRALTAR

Tras las consideraciones anteriores se propone un esquema tentativo de cálculo en el que evidentemente, sus detalles dependen de un modo esencial de los tipos de defensa y pila que se dispongan en el proyecto real.

Las fases de diseño y cálculo que se citan a continuación, no se pueden considerar consecutivas en el tiempo. Como todo proceso de diseño y proyecto en el cálculo constituye un importante elemento auxiliar, se produce una interacción muy importante entre las distintas fases, y se suele proceder por procedimientos de tanteos y falsa posición, hasta alcanzar una solución satisfactoria.

1. Análisis probabilista de las características del impacto (tamaño, velocidad, frecuencia, corrientes o mareas, vientos, estadísticas de accidentes, geometría de las pilas y vanos del puente, etc.).
2. Adopción de unas acciones de impacto plausibles (deterministas o con una distribución de probabilidad).
3. Aplicación de fórmulas empíricas y aproximadas con un sólo grado de libertad para un primer dimensionamiento y adopción del tipo de defensa de pila.
4. Modelización en una segunda fase de las pilas y defensas, como un sistema de varios grados de libertad, en fase elástica bajo la acción de un choque y la consideración de los efectos hidrodinámicos mediante la introducción de las pertinentes masas añadidas. Se puede utilizar cualquiera de los programas de cálculo existentes de tipo lineal (SAPIV, ANSYS, ADINA, STRUDL, etc.).

5. Los valores del cálculo procedente generalmente son muy conservadores, ya que no permiten liberalización plástica de energía. Es posible, la introducción de coeficientes empíricos de tipo impacto-contacto. Sin embargo, se sugiere en esta fase, de definición de detalles del proyecto de realización de cálculos - bidimensionales refinados, que permitan evaluar adecuadamente el fenómeno conjunto y en particular la respuesta y efectivi-dad de las defensas ante un choque. Un programa como el indicado en (2) es conveniente a estos propositos. Existe la tecnología de reactores, y en particular, la correspondiente al diseño de "CASK" o contenedores de material radioactivo bajo la acción de acciones accidentales (caída, explosión, etc) procedimientos del tipo comentado y una filosofía de diseño y análisis que puede verse en la excelente publicación (3). Algunas de las conclusiones allí obtenidas, se han recogido aquí, en la redacción de la metodología de análisis que se presenta, por la semejanza de los problemas planteados, en particular el uso de análisis bidimensionales previos al final 3-D.
6. El dimensionamiento de las distintas partes de la defensa y pi-la, puede conseguirse mediante un análisis aproximado del tipo comentado en el apartado anterior. Es suficientemente adecuado para la mayoría de las situaciones y diseños que pueden conce-birse en la práctica y a todos los efectos del análisis podrían permitir redactar el proyecto definitivo.
7. Por último, y con objeto de comprobar la bondad del diseño elegido y proyectado se podría efectuar una análisis 3-D completo que

permitiría correlacionar los resultados obtenidos en los cálculos aproximados con los "exactos" y de esta forma aseverar el siguiente nivel de seguridad de todas las obras.

Las anteriores fases del cálculo podrían ser concretadas y desarrolladas ante una situación específica de diseño, particularmente en los aspectos de tamaño de malla de cálculo, elementos a utilizar, características de materiales y entorno físico podrían ser definidas en un estudio mas avanzado de factibilidad.

## REFERENCIAS

- (1) ZUKAS, J.A., JONAS, G.H. y MISEY, J.J. "On the utility of plane strain approximations for oblique impact computations". US. Ballistic Research Laboratory. Aberdeen. Maryland (1979).
- (2) KEY, S.W. "Hondo - A Finite Element Computer Program for the Large Deformation Dynamic Response of Asymmetric Solids". Sandia Laboratories (1975).
- (3) CHARMAN, C.M. , GRENZER, R.M. y NICKELL, R.E. "Large Deformation Inelastic Analysis of Impact for Shipping casks". Ed. North Holland (1982).

## APENDICE A.- REVISION DE LA MECANICA DEL CONTINUO

### A.1 INTRODUCCION

La mecánica del continuo trata de deformaciones y movimientos de continuos producidos por procesos mecánicos y térmicos. La teoría de la mecánica de los medios continuos (teoría de campos 3-D) sirve para formular modelos matemáticos que describen el comportamiento físico del continuo.

Conceptualmente, el punto de vista de la teoría de campos es de un suavizamiento de la realidad física, en el sentido de que no constituye una visión atómica de la material, antes bien los cuerpos materiales son asociados con regiones del espacio euclideo. Las variables de campo comprenden partículas, masa, movimientos, fuerzas, energía, entropía y temperatura.

Se pueden clasificar las ecuaciones que permiten describir el comportamiento de los medios continuos en cuatro categorías principales.

(1) Cinemáticas (2) Cinéticas (3) Termodinámicas y (4) Constitutivas.

A continuación se establecen las diferentes ecuaciones que relacionan los distintos tipos de variables que aparecen en la modelación de los medios continuos, es decir, variables cinemáticas, cinéticas y termodinámicas.

## A.2 ECUACIONES CINEMATICAS. MOVIMIENTOS

Relaciona variables que permiten describir el movimiento de un cuerpo (desplazamiento, velocidad y aceleraciones) sin consideración de las causas que lo produce, es decir, los cambios de geometría del cuerpo con el tiempo.

Un cuerpo es un conjunto infinito de partículas para las que puede considerarse una correspondencia biunívoca con una terna ordenada de números, denominados coordenadas de las partículas. A cada una de éstas se les asigna un número positivo denominado masa, que constituye una distribución o medida es decir, que cuando un volumen arbitrario del cuerpo tiende a cero la masa asociada lo hace asimismo. La posición simultánea de las partículas de un cuerpo se designa configuración. Se puede definir más rigurosamente una configuración como una transformación continua de un cuerpo en una región del espacio euclídeo tridimensional. Una serie de transformaciones que definen las configuraciones en instantes arbitrarios  $t$  -o sea, una familia uniparamétrica de configuraciones- se denomina el movimiento del cuerpo.

La figura A.1 muestra la configuración de un cuerpo en el instante  $t$ ,  $B_t$  y una configuración inicial o de referencia usualmente en el instante  $t=0$  y sin tensiones,  $B_0$ .

Se utiliza un sistema global de coordenadas cartesianas  $x$  con objeto de describir los movimientos de todas las partículas en el espacio. Se denomina este sistema de coordenadas espaciales. Se introduce asimismo otro sistema de coordenadas  $X$  unido al entramado material del cuerpo en la configuración de referencia  $B_0$ .



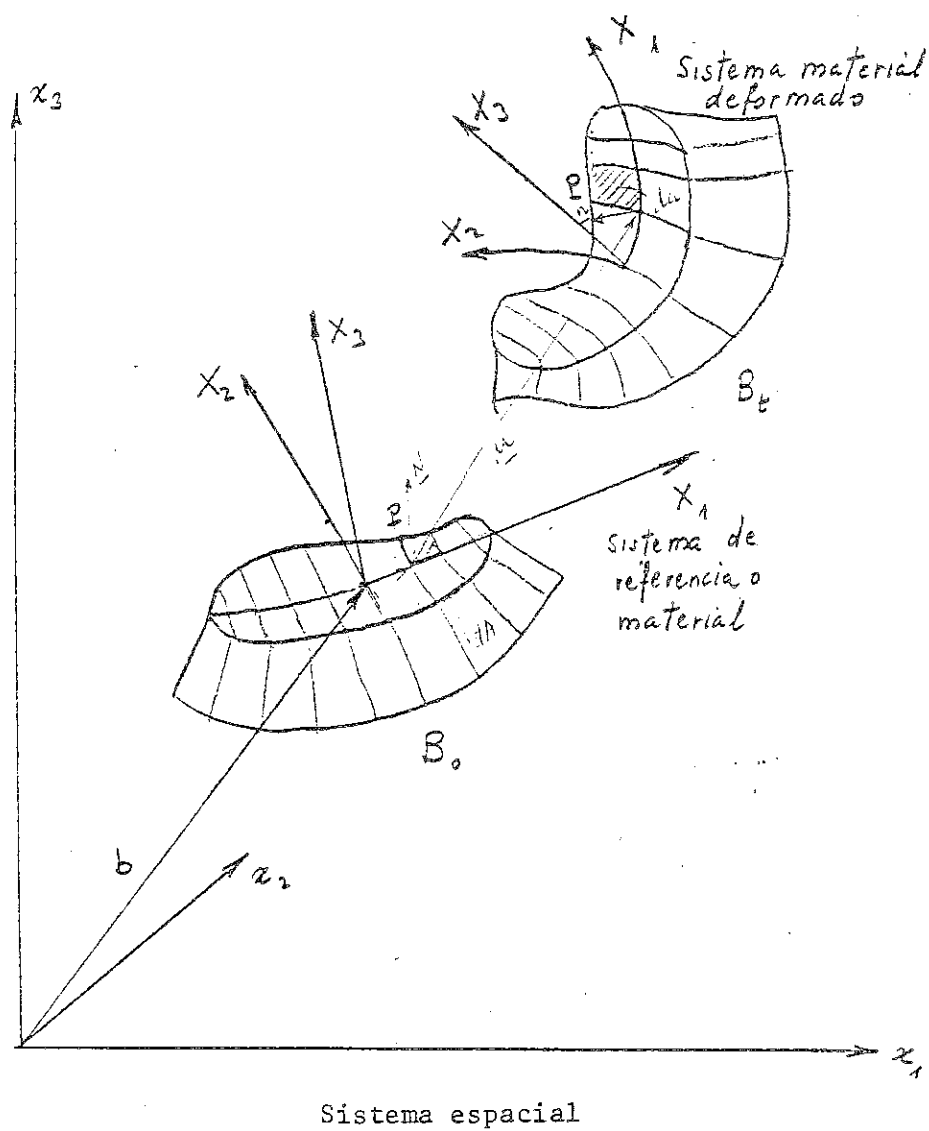


FIGURA A.1 Configuraciones inicial y genérica de un cuerpo.

Este sistema de coordenadas se denomina material o de referencia y permite definir la configuración material que sirve de referencia para las medidas de deformación. Este sistema material de coordenadas se deforma con el cuerpo en las sucesivas configuraciones.

Cada partícula  $P$  del cuerpo se puede identificar por una etiqueta o terna de tres números en la configuración de referencia. Desde un punto de vista material la posición de la partícula  $P$  en el cuerpo material se describe por las ecuaciones:

$$\underline{X} = \hat{\underline{X}}(P) = X_k \underline{I}_k \quad (A.1)$$

La función  $\hat{\underline{X}}(P)$  define la posición de la partícula  $P$  con respecto al sistema cartesiano de referencia, cuyos vectores básicos unitarios se designan por  $\underline{I}_k$ .

Una axioma de la mecánica del continuo establece que  $\hat{\underline{X}}(P)$  representa una transformación biunívoca y que admite inversa. Por lo tanto, cualquier función de la partícula  $P$  pueda expresarse de un modo equivalente en términos de las coordenadas de referencia  $\underline{X}$ .

Se puede definir el movimiento de un cuerpo como una familia de configuraciones dependientes de un parámetro (tiempo), es decir, el movimiento o configuración  $B_t$  en el instante  $t$  referido a la configuración inicial  $B_0$  se expresa por las ecuaciones:

$$\underline{x} = \underline{x}_P(P, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad (A.2)$$

La función  $\hat{x}_P(P, t)$  es la descripción material o lagrangiana del movimiento, mientras  $\underline{x}(X, t)$  corresponde a su descripción referencial. Estos dos términos son directamente intercambiables puesto que existe la correspondencia biunívoca e invertible entre  $P$  y  $\underline{X}(P)$  antes citada.

La posición  $\underline{x}$  de la partícula  $P$  se expresa normalmente en función de la posición de referencia  $\underline{X}$  y el movimiento  $\underline{u}$  como sigue:

$$x_j(X, t) = \delta_{jJ} X_J + b_j + u_j(X, t) \quad (A.3)$$

En donde el vector  $\underline{b}$  define la posición del origen del sistema de referencia (figura A.1) y  $\underline{u}$  es el vector movimiento de la partícula desde su posición de referencia en  $B_0$ . Se supone que la transformación entre los dos sistemas cartesianos se lleva a cabo mediante el tensor  $\delta_{jJ}$ .

### A.3 ECUACIONES CINEMATICAS. MEDIDAS DE DEFORMACION

Se puede interpretar el movimiento (ó función de deformaciones) descrito por la ecuación (A.2) como una transformación de la configuración de referencia  $B_0$  en la nueva configuración  $B_t$ :

$$\hat{x}: B_0 \rightarrow B_t \quad (A.4)$$

Un gradiente de deformación  $\underline{F}$  es la localización de la ecuación (A.3) con el supuesto de que la transformación  $\underline{x}$  es suficientemente suave para ser diferenciable, es decir:

$$F_{iJ} = \hat{x}_{i,J} = \delta_{iJ} + u_{i,J} \quad (A.5)$$

en donde,

$$(\phi)_{,J} = \frac{\partial(\phi)}{\partial X_J}$$

A continuación se introducen unas medidas de deformación en función del gradiente de deformación, algunos de las cuales se utilizarán más adelante y otras se deducen por conveniencia matemática.

La extensión  $\Lambda(\underline{Y})$  de un vector  $\underline{Y}$  de la configuración de referencia es la medida de la longitud deformada del vector, es decir:

$$\Lambda(\underline{Y}) = \frac{|\underline{y}|}{|\underline{Y}|} \quad (A.6)$$

en donde  $|\underline{y}|$  e  $|\underline{Y}|$  son las longitudes de un segmento recto en la configuración deformada y de referencia respectivamente. La relación entre ambos vectores se deduce a partir de (A.5):

$$y_i = G_{iJ} Y_J \quad (A.7)$$

sustituyendo (A.7) en la expresión (A.6) se obtiene:

$$\Lambda(\underline{Y}) = \frac{(y_i y_i)^{\frac{1}{2}}}{(Y_I Y_I)^{\frac{1}{2}}} = (G_{IJ} Y_I Y_J)^{\frac{1}{2}} \quad (A.8)$$

suponiendo el vector  $\underline{Y}$  de longitud unidad y  $G_{ij}$  corresponden a las componentes del tensor de deformación definido como sigue:

$$G_{IJ} = F_{kI} F_{kI} \quad (A.9)$$

La elongación de  $E_{(\underline{Y})}$  que mide el cambio de longitud del vector  $\underline{Y}$  después de la deformación es:

$$E_{(\underline{Y})} = \Lambda_{(\underline{Y})} - 1 \quad (\text{A.10})$$

La distorsión de un ángulo entre dos vectores  $\underline{Y}^1$  e  $\underline{Y}^2$  previamente ortogonales se mide por la expresión:

$$\text{sen} \gamma_{(\underline{Y}^1, \underline{Y}^2)} = \frac{\underline{Y}^1 \cdot \underline{Y}^2}{\|\underline{Y}^1\| \|\underline{Y}^2\|} = \frac{G_{IJ} Y_I^1 Y_J^2}{\Lambda_{(\underline{Y}^1)} \Lambda_{(\underline{Y}^2)}} \quad (\text{A.11})$$

Una medida de deformación conveniente en el desarrollo de la mecánica del continuo es el tensor de deformación de Green - St. Venant (Lagrangiano) que se define como sigue:

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(G_{IJ} - \delta_{IJ}) \quad (\text{A.12})$$

con  $\delta_{IJ}$  la delta de Kronecker ( $\delta_{II} = 1$ ;  $\delta_{IJ} = 0$  con  $I \neq J$ ).

Se pueden mostrar fácilmente a partir de las ecuaciones (A.8) a (A.12) las siguientes propiedades de este tensor:

$$E_{II} = E_{(I)} + \frac{1}{2} E_{(I)}^2 \quad (\text{sin suma}) \quad (\text{A.13})$$

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} \text{sen} \gamma_{(I, J)} (1 + E_{(I)} + E_{(J)} + E_{(J)} E_{(J)}) \quad (I \neq J) \quad (\text{A.14})$$

En los problemas con pequeñas deformaciones ( $E_{(I)} \ll 1$ ), los componentes del tensor de deformación de Green - St. Venant constituyen adecuadas aproximaciones de la elongación y distorsión, puesto que se cumple:

$$E_{II} \approx E_{(I)}$$

$$2E_{IJ} \approx \text{sen} \gamma_{IJ}$$

La expresión del tensor de deformación de Green - St. Venant es:

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (\delta_{Ii} u_{i,J} + \delta_{Ji} u_{i,I} + u_{i,I} u_{i,J}) \quad (A.15)$$

Por otra parte en los problemas con pequeños movimientos no es preciso distinguir, al diferenciar, entre los dos sistemas de coordenadas  $\underline{x}$  y  $\underline{X}$  y el tensor de deformación se puede escribir en la forma familiar:

$$E_{IJ} \approx e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (A.16)$$

El tensor de deformación de Almansi, adecuado para descripciones espaciales, se define como sigue:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}) \quad (A.17)$$

con

$$u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Este tensor, de un modo semejante al tensor de Green - St. Venant puede considerarse los efectos de las deformaciones y movimientos finitos.

#### A.4 ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Las siguientes ecuaciones de equilibrio son válidas para todo el cuerpo sometido a un estado arbitrario de deformación independiente de las condiciones constitutivas de su material y de su geometría. Todas ellas rigen los cambios en el estado termodinámico del sólido a excepción de la última referente a la desigualdad de producción de entropía que impone ciertas restricciones al modelo constitutivo. Las ecuaciones de equilibrio a considerar son:

- (1) Equilibrio de la masa.
- (2) Equilibrio de la cantidad de movimiento.
- (3) Equilibrio del momento de la cantidad de movimiento.
- (4) Equilibrio de la energía (Primera ley de la Termodinámica).
- (5) Desigualdad de la producción de la energía (Segunda ley de la Termodinámica).

Estas ecuaciones pueden plantearse en forma espacial o material. Para cada una de ellas se puede considerar a nivel de elemento diferencial (planteamiento local) o a nivel de toda la estructura (planteamiento global o integral).

(a) Ecuaciones de equilibrio en forma espacial

En su planteamiento global, cualquiera de las ecuaciones de equilibrio que se exponen más adelante, establece la igualdad de la variación de la variable del campo que se considera,  $\phi = \phi(P, t)$  en una configuración del sólido con la suma de las cantidades generadas dentro del mismo o desde el exterior. En forma matemática, este equilibrio se expresa como sigue:

$$\frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho \phi \, dv - \int_{\partial B_t} \underline{\varepsilon} \, da - \int_{B_t} \underline{s} \rho \, dv = 0 \quad (A.18)$$

en donde  $\underline{\varepsilon}$  es un flujo de la variable  $\phi$  a través del área  $da$  del contorno  $\partial B_t$  de la configuración  $B_t$  cuyo volumen es  $v$ ,  $\underline{s}$  es una fuente interior a la configuración del generador de la variable  $\phi$  y  $\rho$  es la densidad del cuerpo.

Si se consideran las variables apropiadas para  $\phi$ ,  $\underline{\varepsilon}$  y  $\underline{s}$  se deducen las correspondientes ecuaciones de equilibrio en su formulación global mediante la ecuación (A.18). Para las diferentes relaciones de equilibrio las variables que se adoptan se indican a continuación:

(1) Conservación de masa.

$$\phi = 1 \quad ; \quad \underline{\varepsilon} = 0 \quad \text{y} \quad \underline{s} = 0$$

(2) Equilibrio de la cantidad de movimiento.

$$\phi = \underline{\dot{u}} \quad (\text{vector velocidad})$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\hat{T}} \quad (\text{la tracción de Cauchy en el contorno}) \quad \text{y} \quad \underline{s} = \underline{b} \quad (\text{las acciones másicas}).$$



(3) Equilibrio del momento de la cantidad de movimiento.

$$\underline{\phi} = \underline{x} \wedge \underline{\dot{u}} \quad (\text{momento del vector velocidad})$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{x} \wedge \underline{\hat{\tau}} \quad (\text{momento de la tracción de Kuchy})$$

$$\underline{s} = \underline{x} \wedge \underline{b} \quad (\text{momento de las acciones másicas})$$

(4) Conservación de la energía.

$$\phi = \frac{1}{2} \underline{\dot{u}} \cdot \underline{\dot{u}} + e \quad (\text{escalar energía total suma de la energía cinética y de la energía interna}).$$

La energía interna  $e$  se define como:

$$e = \psi + \eta \theta$$

con  $\psi$  una energía libre

$\eta \theta$  energía térmica, puesto que  $\eta$  es la densidad de entropía y  $\theta$  la temperatura.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\hat{\tau}} \underline{\dot{u}} + \underline{k} \quad \text{es el flujo de energía total suma de la energía cinética y de la densidad de influjo de calor.}$$

$$\underline{s} = \underline{b} \underline{\dot{u}} + \underline{r} \quad \text{es la energía interna total, (mecánica más la procedente de una fuente calorífica).}$$

(5) Desigualdad de la producción de entropía.

La expresión de la desigualdad de la producción de entropía establece que la ecuación (A.18) es siempre no negativa, para la configuración  $B_t$ , considerando en ella, las siguientes igualdades:

$$\underline{\phi} = \eta \quad (\text{densidad de entropía})$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{k}{\theta} \quad (\text{flujo de entropía})$$

$$\underline{s} = \frac{r}{\theta} \quad (\text{fuente de producción de entropía})$$

Es posible un planteamiento local de las cinco relaciones anteriores. En el caso de configuraciones continuas y suaves, se puede obtener las ecuaciones de equilibrio planteadas al elemento diferencial (ecuaciones locales) a partir de las anteriores globales mediante la aplicación del teorema de Gauss-Green. Estas ecuaciones locales se escriben entonces:

(1) Conservación de masa.

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{J}$$

con  $\rho_0$  la densidad en la configuración  $B_0$  y  $J$  el determinante Jacobiano de la transformación.

(2) Equilibrio de la cantidad de movimiento.

$$t_{kj,k} + \rho b_j - \rho \ddot{u}_j = 0$$

siendo la expresión de la tensión de Cauchy, como sigue:

$$\hat{\tau}_i = t_{ji} n_j$$

por lo tanto  $t_{ji}$  corresponde a los componentes de la tensión de Cauchy que actúa sobre la cara cuya normal es  $n_j$  y en la dirección del eje de coordenadas  $x_i$ .

(3) Equilibrio de momento de la cantidad de movimiento.

$$t_{ji} = t_{ij}$$

(4) Conservación de la energía.

$$\rho \dot{e} + h_{k,k} - y_{ij} \dot{u}_{i,j} - \rho r = 0$$

siendo la densidad de influjo de calor en el contorno, como sigue:

$$h = -h_j n_j$$

con  $h_j$  la componente según la coordenada  $x_j$ .

(5) Desigualdad de la producción de entropía.

$$-(\dot{\psi} + \theta \dot{\eta}) + \frac{1}{\rho} t_{ij} \dot{u}_{i,j} - \frac{1}{\rho \theta} h_i \theta_{,i} \geq 0$$

La formulación anterior se suele denominar euleriana o en forma espacial. Las variables que aparecen en las ecuaciones de equilibrio anteriores se miden con respecto a la configuración corriente, es decir, a la configuración  $B_t$  para la que estas ecua

ciones se aplican. Un resumen de las ecuaciones de equilibrio se presentan en la tabla A.1. La deducción de estas ecuaciones se simple, como ejemplo se presenta la transformación de la ecuación (3) global a local.

El teorema de la divergencia expresa para un vector  $\bar{r}$  genérico:

$$\int_{\partial B_t} \bar{r} d\bar{\sigma} = \int_{B_t} \text{div } \bar{r} dv$$

La componente  $j$  (ecuación de Cauchy es):

$$\int_{\partial B_t} (t_{kj} n_k) d_a = \int_{\partial B_t} t_{kj} \cdot n_k d_a = \int_{B_t} t_{kj,k} dv$$

Se considera la componente  $j$  de la ecuación global (3):

$$\int_{\partial B_t} (\bar{x} \wedge t_{kj} \cdot n_k \bar{i}_j) d_a = \int_{B_t} (x \wedge t_{kj,k} i_j) dv + \int_{B_t} (\bar{x}_{,k} \wedge t_{kj} \bar{i}_j) dv$$

El último término no se anula en virtud de las ecuaciones 2 y resulta para una particularización:

$$\int_{B_t} x_{m,k} t_{kj} (\bar{i}_m \wedge \bar{i}_j) dv = \int_{B_t} (i_k \wedge i_j) dv$$

Análogamente con el término  $\hat{\tau}_k$  se obtiene:

$$\int_{B_t} x_{m,j} t_{jk} (i_m \wedge i_k) dv = \int_{B_t} t_{jk} (i_j \wedge i_k) dv$$

Finalmente resulta:  $t_{jk} = t_{kj}$

TABLA A.1 Ecuaciones de equilibrio en forma espacial o eulerianas de descripción de un sólido deformable en la configuración  $B_t$ .

$$(1) \frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho \, dv = 0$$

$$(2) \frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho \, \dot{\underline{u}} \, dv = \int_{B_t} \rho \, \underline{b} \, dv + \int_{\partial B_t} \hat{\underline{\tau}} \, da$$

$$(3) \frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho (\underline{x} \wedge \underline{\dot{u}}) \, dv = \int_{B_t} \rho (\underline{x} \wedge \underline{b}) \, dv + \int_{\partial B_t} \hat{\underline{x}} \wedge \underline{\underline{\tau}} \, da$$

$$(4) \frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho \left( \frac{1}{2} \dot{\underline{u}} \cdot \dot{\underline{u}} + e \right) dv = \int_{B_t} \rho (\underline{b} \cdot \dot{\underline{u}} + r) \, dv + \int_{\partial B_t} \hat{\underline{\tau}} (\underline{\underline{u}} + \underline{h}) \, da$$

$$(5) \frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho \, \eta \, dv - \int_{B_t} \frac{r}{\theta} \, \rho \, dv - \int_{\partial B_t} \frac{h}{\theta} \, da = 0$$

$$\rho = \rho_0/J$$

$$t_{kj,k} + \rho \, b_j = \rho \, \ddot{u}_j$$

$$t_{ij} = t_{ji}$$

$$\rho \, \dot{e} + h_{k,k} - t_{ij} \, \dot{u}_{i,j} - \rho \, r = 0$$

$$-(\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta) + \frac{1}{\rho} t_{ij} \, \dot{u}_{i,j} - \frac{1}{\rho \theta} h_i \, \dot{\theta}_{,i} = 0$$

(b) Ecuaciones de equilibrio en forma material.

La transformación de las ecuaciones de equilibrio de la forma espacial a la material requiere establecer la correspondencia entre los elementos diferencial de área y volumen de las dos configuraciones  $B_0$  y  $B_t$ . Estas se deducen a partir de una fórmula análoga a la (A.5) y de la observación de la figura (A.1), alcanzándose los resultados siguientes (tabla A.1):

$$da_i = n_i d_a = \hat{x}_{I,i} N_I J dA = J \hat{x}_{I,i} dA_i \quad (A.19)$$

$$dv = J dV \quad (A.20)$$

en donde  $\underline{N}$ ,  $dA$  y  $dV$  son respectivamente la normal, diferencial de área y volumen del sólido en la configuración  $B_0$ , que se transforman una vez de formado en  $\underline{n}$ ,  $d_a$  y  $dv$ , respectivamente en  $B_t$ . El gradiente de deformación  $\underline{F}(x,t)$  en un punto de  $B_t$ , se asocia al movimiento de  $B_0$ , para el que el sistema material de coordenadas se inserta y  $J = \det(F)$ .

La ecuación (A.19) se conoce como la fórmula de Nanson. Se deduce de acuerdo con las consideraciones siguientes:

$$\text{Sea } \underline{dx} = \underline{F} d\underline{X} \quad F_{iI} = \hat{x}_{i,I}$$

$$d\underline{X} = \underline{F}^{-1} d\underline{x} \quad F_{Ii}^{-1} = \hat{x}_{I,i}$$

$$\text{con } F_{iI} F_{Ij}^{-1} = \delta_{ij} \quad F_{Ii}^{-1} F_{iJ} = \delta_{IJ}$$

$$\underline{N} \, dA = d\underline{X}_1 + d\underline{X}_2 \quad ; \quad \underline{n} \, da = d\underline{x}_1 + d\underline{x}_2$$

$$dA_I = N_I \, dA = e_{IJK} \, dX_{1J} dX_{2K} \quad ; \quad da = n_i \, da = e_{ijk} \, dx_{1j} \, dx_{2k}$$

$$N_I \, dA = dA_I = e_{IJK} \, F_{Jj}^{-1} \, F_{Kk}^{-1} \, dx_{1j} \, dx_{2k}$$

$$F_{Ii}^{-1} \, N_I \, dA = e_{IJK} \, F_{Ii}^{-1} \, F_{Jj}^{-1} \, F_{Kk}^{-1} \, dx_{1j} \, dx_{2k}$$

$$F_{Ii}^{-1} \, N_I \, dA = e_{ijk} \, \frac{\rho}{\rho_0} \, dx_{1j} \, dx_{2k}$$

$$F_{Ii}^{-1} \, N_I \, dA = \frac{\rho}{\rho_0} \, n_i \, da \quad ; \quad n_i \, da = J \, F_{Ii}^{-1} \, N_I \, dA$$

$$da_i = n_i \, da = J \, \hat{X}_{I,i} \, N_I \, dA = J \, \hat{X}_{I,i} \, dA_I$$

El tensor de tensiones puede ser considerado de dos modos diferentes dentro de la descripción material.

- (1) La tensión primera Piola-Kirchoff,  $P_{Ij}$ , se define como la fuerza actuando en  $B_t$  en la dirección  $x_j$  por unidad de área medida en la configuración de referencia  $B_0$ . La relación de  $P_{Ij}$  con la tensión de Cauchy  $t_{ij}$  se deduce considerando la ecuación (A.19), es decir:

$$P_{Ij} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial A_i} = \frac{\partial a_i}{\partial A_i} \frac{\partial t_{ij}}{\partial a_i} = J \, \hat{X}_{I,i} \, t_{ij} \quad (A.21)$$

en donde  $\underline{f}$  representa la fuerza definida por la expresión  $t_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial a_j}$ .

Se observa que el tensor  $P_{Ij}$  no es simétrico.

- (2) La tensión segunda de Piola-Kirchoff,  $S_{Ij}$  se introduce fundamentalmente por conveniencia matemática y su significado físico se pierde. Su definición es la siguiente:

$$S_{IJ} = \hat{X}_{J,j} P_{Ij} = J \hat{X}_{I,i} \hat{X}_{J,j} t_{ij} \quad (A.22)$$

El tensor  $S_{Ij}$  es simétrico.

De un modo semejante al vector de flujo de calor  $\underline{h}$  que actúa en la unidad de área de  $\partial B_t$  se transforma en  $\underline{H}$  medido en la unidad de área de  $\partial B_0$  mediante la expresión:

$$H_I = J \hat{X}_{I,i} h_i \quad (A.23)$$

Las fórmulas anteriores permiten expresar las ecuaciones de equilibrio en forma lagrangiana, es decir tomando como el sistema material de coordenadas el de la configuración de referencia. Según esta configuración de referencia que sirve de base para las medidas de las variables de estado, se puede considerar la formulación lagrangiana total o modo material si se utiliza la configuración inicial o sin deformaciones  $B_0$ , o bien la formulación lagrangiana renovada o modo relativo material si la configuración de referencia corresponde a una inmediatamente anterior a la corriente o actual  $B_t$ .

Las ecuaciones de equilibrio resultante de la aplicación de las transformaciones (A.21), (A.22) y (A.23) se resumen en la tabla A.2.



TABLA A.2 Ecuaciones de equilibrio en forma material o lagrangiana de descripción de un sólido deformable en la configuración  $B_t$  con respecto a la configuración de referencia  $B_0$ .

$$(1) \frac{d}{dt} \int_{B_0} \rho_0 dV = 0$$

$$(2) \frac{d}{dt} \int_{B_0} \rho_0 \underline{\dot{u}} dV = \int_{B_0} \rho_0 \underline{b} dV + \int_{\partial B_0} \hat{\underline{T}} dA$$

$$(3) \frac{d}{dt} \int_{B_0} \rho_0 (\underline{X} \wedge \underline{\dot{u}}) dV = \int_{B_0} \rho_0 (\underline{X} \wedge \underline{b}) dV + \int_{\partial B_0} (\underline{\hat{X}} \wedge \hat{\underline{T}}) dA$$

$$(4) \frac{d}{dt} \int_{B_0} \rho_0 \left( \frac{1}{2} \underline{\dot{u}} \cdot \underline{\dot{u}} + e \right) dV = \int_{B_0} \rho_0 (\underline{b} \cdot \underline{\dot{u}} + r) dV + \int_{\partial B_0} (\hat{\underline{T}} \cdot \underline{\dot{u}} + H) dA$$

$$(5) \frac{d}{dt} \int_{B_0} \rho_0 \eta dV - \int_{\partial B_0} \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial B_0} \frac{H}{\theta} dA \geq 0$$

$$\rho = \rho_0/J$$

$$(F_{jJ} S_{KJ})_{,K} + \rho_0 b_j = \rho_0 \ddot{u}_j$$

$$S_{IJ} = S_{JI}$$

$$\rho_0 \dot{e} + H_{K,K} - \frac{1}{2} S_{KL} \dot{C}_{KL} - \rho_0 r = 0$$

$$-(\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta) + \frac{1}{\rho_0} S_{KL} \dot{C}_{KL} - \frac{1}{\rho \theta} H_{K,K} \approx 0$$

#### A.5 METODO DE FORMULACION

Dentro del marco de la mecánica del continuo, todas las ecuaciones anteriores deben ser satisfechas por las variables de estado y en cada una de las configuraciones del movimiento. Las ecuaciones de equilibrio (conservación) de masa y del momento de la cantidad de movimiento se cumplen automáticamente mediante el uso de la igualdad  $\rho = \rho_0/J$  y del tensor de tensiones simétrico. Asimismo el equilibrio energético es trivial si se trata de problemas conservativos y con efectos térmicos desacoplados. En estos casos, permanece el problema de la determinación de las variables de estado que satisfagan los restantes principios: equilibrio de la cantidad de movimiento y de la desigualdad de producción de entropía. Si se adoptan unas ecuaciones constitutivas del material (relaciones tensiones y deformaciones) que cumplan la desigualdad de producción de entropía, el problema anterior, consiste en obtener un conjunto de variables de estado que satisfagan las ecuaciones de equilibrio de la cantidad de movimiento, unas ecuaciones constitutivas, unas relaciones deformaciones -movimientos y unas condiciones iniciales y de contorno especificadas. Este problema se denomina de contorno y condiciones iniciales. Existen fundamentalmente dos modos diferentes de solución: analítico y numérico. El primero sólo es aplicable a situaciones muy simples de geometría y caracterización del material, por lo que aquí sólo se comentarán las técnicas numéricas y en particular las técnicas de discretización basadas en el método de los elementos finitos.

Sin embargo, permanece la discusión sobre la formulación más adecuada en cada caso: lagrangiana o euleriana.

La formulación lagrangiana, sigue el movimiento de partículas determinadas de masa. Si se utiliza una técnica numérica (elementos finitos o diferencias finitas) la malla de cálculo es fija con el material y se distorsiona con él. Por lo tanto presenta esta formulación las siguientes ventajas:

- (1) La programación es conceptualmente simple puesto que las ecuaciones de equilibrio son más sencillas en su planteamiento, al no existir términos convectivos. Esto significa un cálculo más rápido en un computador.
- (2) Las condiciones de contorno (bordes libres e interfases entre materiales) que son estacionarios respecto a las coordenadas materiales son muy fáciles de plantear. Sin embargo, condiciones de contacto, apertura, efectos de rozamiento, etc... exigen una lógica mucho más complicada, si se intenta alcanzar cierta generalidad en el tratamiento del problema.
- (3) Ciertas ecuaciones constitutivas, que implican memoria del comportamiento del material son más simples de plantear en este tipo de formulación.

Las desventajas se han mencionado; una distorsión de la malla, que puede generar problemas numéricos serios, en situaciones con grandes movimientos y la dificultad de un tratamiento general del problema de contacto. Existen varias técnicas para obviar estas dificultades, que se comentarán más adelante (remallado e interfases deslizantes, por ejemplo).

En la formulación euleriana la malla de cálculo permanece fija en el espacio mientras el material pasa a través de ella. Esta fórmula se hace precisa en el tratamiento de problemas en los que predominan importantes distorsiones o cuando existen mezclas de materiales inicialmente separados. La mayor desventaja procede de la dificultad de localización de las superficies materiales y de las interfases, que tienden a difuminarse en la malla de cálculo. Esta localización exige técnicas específicas (partículas trazadoras sin masa, transporte preferente de materiales, son algunos ejemplos de estas técnicas.

Se comprende que ninguna técnica computacional permite tratar todas las situaciones que aparecen en la dinámica del impacto. Existen formulaciones mixtas, generalmente surgidas para el análisis de grupos específicos de problemas. Así, en algunos de estos métodos híbridos se utilizan procedimientos eulerianos al inicio del cálculo, cuando cabe esperar importantes distorsiones y flujos de material, para finalizar con una formulación lagrangiana. Otros métodos mixtos considera la aplicación en paralelo de cálculos eulerianos y lagrangianos.

## A.6 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

### A.6.1 Planteamiento general

Utilizando una descripción lagrangiana, las ecuaciones del movimiento son:

$$(S_{IJ} F_{jI})_{,I} + \rho_0 b_j - \rho_0 \ddot{u}_j = 0 \quad \text{para} \quad P \in B \quad (A.24)$$

$$N_I (S_{IJ} F_{jI}) - \hat{T}_j^{(N)} = 0 \quad \text{para} \quad P \in \partial B \quad (A.25)$$

Se supone que el cuerpo está en la configuración  $B_t$  y  $P$  se refiere a una partícula del sólido  $P$ . Se puede evidentemente sustituir la partícula " $\underline{P}$ " por su posición ocupada " $X(P)$ " en la configuración de referencia  $B$  del cuerpo.

La técnica de los residuos ponderados en su variante de Galerkin permite obtener las soluciones débiles del problema de contorno y valores iniciales representado por las ecuaciones (A.24), (A.25) y los valores derivados de las funciones  $u_j$  y  $\dot{u}_j$  para  $t=0$ .

La función error pesada con cada función de peso  $u_j^*$  debe ser nula:

$$\begin{aligned} G(u_j, u_j^*) = 0 = & - \int_{B_0} (S_{IJ} D_{jJ})_{,I} u_j^* dV - \int_{B_0} (\rho_0 b_j - \rho_0 \ddot{u}_j) u_j^* dV + \\ & + \int_{\partial B_0} (N_I S_{IJ} F_{jJ} - \hat{T}_j^{(N)}) u_j^* dA \end{aligned} \quad (A.26)$$

Si se aplica el teorema de Green-Gauss a la primera integral de la ecuación (A.26) se obtiene:

$$G(u_j, u_j^*) = - \int_{B_0} (S_{IJ} F_{jJ})_{,I} u_j^* dV - \int_{B_0} (\rho_0 b_j - \rho_0 \ddot{u}_j) \ddot{u}_j u_j^* dV - \int_{\partial B_0} \hat{T}_j^{(N)} u_j^* dA = 0 \quad (A.27)$$

Si bien las integrales de la ecuación (A.27) se extienden a la configuración inicial  $B_0$ , esta ecuación se aplica en realidad al sólido material en su configuración corriente  $B_t$ . Todas las variables de esta ecuación corresponden a los valores correspondientes en  $B_t$ . El gradiente de deformación  $\underline{F}$  está asociado al movimiento desde  $B_0$  a  $B_t$ .

La ecuación (A.27) se puede interpretar, como es bien sabido, como la formulación matemática del principio de los trabajos virtuales.

En la formulación de Galerkin se supone que  $u_j^*$  pertenece al mismo espacio de funciones que los movimientos reales  $u_j$ . Por conveniencia se elige  $u_j^*$  de modo que las condiciones esenciales (condiciones asociadas a los movimientos o variables primarias del problema) sean satisfechas.

#### A.6.2 Discretización espacial. Método de los elementos finitos

La técnica en elementos finitos es bien conocida y puede aplicarse directamente a la ecuación (A.27) con objeto de obtener su discretización espacial.

En efecto, se puede escribir:

$$\underline{u}(x) = \underline{N}^a(x) \underline{U}^a \quad (A.28)$$

$$\underline{u}^*(x) = \underline{N}^a(x) \underline{U}^{*a} \quad (A.29)$$

con  $\underline{N}^a(x)$  funciones de interpolación y  $\underline{U}^a$ ,  $\underline{U}^{*a}$  los vectores conteniendo los valores de las variables  $u_j$  y  $u_j^*$  en el nudo genérico  $a$  (grado de libertad) del elemento  $B_0^e$ .

El continuo  $B_0$  se supone dividido por los elementos  $B_0^e$ , es decir:

$$G(u_j, u_j^*) = \sum_e G^e(u_j, u_j^*) \quad (A.30)$$

con

$$G^e(u_j, u_j^*) = \int_{B_0^e} (S_{IJ} F_{Jj}) u_{j,I}^* dv - \int_{B_0^e} (\rho_0 b_j - \rho_0 \ddot{u}_j) u_j^* dv - \\ - \int_{\partial B_0^e} \hat{T}_e^{(N)} u_j^* dA \quad (A.31)$$

Sustituyendo las expresiones (A.28) y (A.29) en la (A.31) se obtiene la contribución al error ponderado del elemento  $B_0^e$ :

$$G^e(\underline{u}, \underline{u}^*) = G^*(\underline{U}, \underline{U}^*) = U_j^{*b} (K_j^b + M_{ji}^{ba} \ddot{U}_i^a - R_j^b) \quad (A.32)$$

en donde las componentes de las matrices de rigidez y masa, y el vector de fuerzas generalizadas, son respectivamente:

$$K_j^b = \int_{B_0^e} S_{IJ} F_{Jj} N_j^b dv \quad (A.33)$$

$$M_{ji}^{ba} = \int_{B_0^e} N_j^a N_i^b dv \delta_{ij} \quad (A.34)$$

$$R_j^b = \int_{\partial B_0^e} \hat{T}_j^{(N)} N_j^b dA + \int_{B_0^e} \rho_0 b_j N_j^b dv \quad (A.35)$$

Se ha utilizado la notación de índices, de modo que el superior se refiere al número del grado de libertad y el inferior a la base espacial.

La arbitrariedad de las funciones  $u_j^*$  y su exigencia de cumplimiento de las condiciones esenciales de contorno conduce a la ecuación matricial:

$$\underline{K}(\underline{U}) + \underline{M} \ddot{\underline{U}} - \underline{R} = \underline{0} \quad (A.36)$$

en donde las matrices  $\underline{K}$ ,  $\underline{M}$  y  $\underline{R}$  se deducen mediante suma directa de las da das por las expresiones (A.33), (A.34) y (A.35), y posteriormente modifi-  
cación por consideración de las ecuaciones de contorno.

La ecuación (A.36) representa la ecuación del movimiento dinámico en  
función de las variables  $\underline{U}$ .

Es posible mediante un procedimiento análogo, deducir ecuaciones simi  
lares, en una formulación euleriana o en modo espacial. En efecto, se pue-  
den evaluar las matrices de cada elemento mediante las expresiones:

$$K_j^b = \int_{B_t^e} t_{ij} N_{,i}^b dV$$

$$M_{ij}^{ab} = \int_{B_t^e} \rho_t N^a N^b dV \cdot \delta_{ij}$$

$$R_j^b = \int_{\partial B_t^e} \hat{t}_j^{(n)} N^b dA + \int_{B_t^e} \rho_t b_j N^b dV$$

En este caso la función de forma  $N$ , se define sobre el dominio  $B_t$ , es  
decir:

$$u_i(\underline{x}) = N^a(\underline{x}) \underline{U}_i^a \quad \underline{x} \in B_t$$

### A.6.3 Métodos de solución

La ecuación del movimiento o equilibrio dinámico (A.36), discretiza-  
da mediante la técnica comentada de los elementos finitos corresponde a  
una ecuación diferencial con respecto al parámetro tiempo. Esta ecuación



en conjunción con las condiciones iniciales permite obtener  $\underline{U} = \underline{U}(t)$ .

$$\underline{U}(0) = \underline{d} \quad \dot{\underline{U}}(0) = \underline{v}$$

Existen dos procedimientos fundamentales de resolución de este tipo de problemas -de carácter en general no lineal- el método de superposición de modos entre secuencia linealizada de estados y el conjunto de métodos denominados de integración directa. Entre estos últimos en general, de fácil implementación en un computador, el más simple corresponde al algoritmo de Newmark. Este utiliza las siguientes relaciones de recurrencia entre dos instantes consecutivos  $t_n$  y  $t_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{n+1} &= \underline{U}_n + \Delta t \dot{\underline{U}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_{n+1} \\ \dot{\underline{U}}_{n+1} &= \dot{\underline{U}}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\underline{U}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\underline{U}}_{n+1} \end{aligned} \quad (A.37)$$

en donde  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  es el intervalo de tiempo,  $\beta$  y  $\gamma$  son parámetros de Newmark.

La ecuación generalizada del movimiento (A.36) en el instante  $t_{n+1}$  es:

$$\underline{K}(\underline{U}_{n+1}) + \underline{M} \ddot{\underline{U}}_{n+1} - \underline{R}_{n+1} = \underline{0} \quad (A.38)$$

Eliminando la aceleración  $\ddot{\underline{U}}_{n+1}$  entre las ecuaciones (A.37) y (A.38) se obtiene la ecuación no lineal:

$$\underline{K}(\underline{U}_{n+1}) + \frac{\underline{M}}{\beta \Delta t^2} \underline{U}_{n+1} - (\underline{R}_{n+1} + \underline{A}_n) = \underline{0} \quad (A.39)$$

siendo

$$\underline{A}_{-n} = \frac{M}{\beta \Delta t^2} (\underline{U}_{-n} + \Delta t \dot{\underline{U}}_{-n} + (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_{-n})$$

Se pueden utilizar técnicas de resolución de problemas no lineales, como Newton Raphson, paso a paso, iterativas, etc. para obtener el vector  $\underline{U}_{-n+1}$  en la ecuación (A.39). Se describe a continuación el método de Newton-Raphson, que linealiza adecuadamente la (A.39) e itera sucesivamente. Se obtiene el incremento j-simo de  $\underline{U}_{-n+1}$  mediante la fórmula:

$$\{DK(\underline{U}_{-n+1}^j) + \frac{M}{\beta \Delta t^2}\} \Delta^j \underline{U}_{-n+1} = \{R_{-n+1} + \underline{A}_{-n+1} - K(\underline{U}_{-n+1}^j) - M \ddot{\underline{U}}_{-n+1}^j\} \quad (A.40)$$

en donde  $DK(\underline{U}_{-n+1}^j)$  es la matriz tangente, definida por la expresión:

$$DK(\underline{U}_{-n+1}^j) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} K(\underline{U}_{-n+1}^j + \epsilon \Delta \underline{U}_{-n+1}^j) \right|_{\epsilon=0}$$

$\underline{U}_{-n+1}^j$  y  $\underline{U}_{-n+1}^{j+1}$  son valores de  $\underline{U}_{-n}$  para las iteraciones consecutivas j y j+1.

y

$$\Delta \underline{U}_{-n+1}^j = \underline{U}_{-n+1}^{j+1} - \underline{U}_{-n+1}^j$$

## APENDICE B.- ALGORITMO DEL IMPACTO

### B.1 PLANTEAMIENTO TEORICO

En lo que sigue se expone la base teórica que soporta un bien conocido programa en elementos finitos tridimensional con formulación explícita y que utiliza las características de programación vectorial, para la obtención eficiente de la respuesta dinámica en grandes deformaciones de sólidos inelásticos. Este programa denominado DYNA 3D contiene un algoritmo de contacto-impacto que permite describir despegues y deslizamientos a lo largo de las interfaces del material. Mediante una especialización de este algoritmo, tales interfaces pueden ser constreñidas a admitir dosificación variable sin la necesidad de regiones de transición. La discretización espacial se logra mediante elementos finitos simples -la drillos de ocho nudos- y las ecuaciones del movimiento se integran mediante un método en diferencias centrales. El programa se encuentra actualmente implementado en ordenadores CRAY-1 y CDC7600. La exposición teórica de este apartado sigue las líneas desarrolladas en (6).

Si se considera el cuerpo que muestra la figura B.1, el objetivo del cálculo es obtener las deformaciones dependientes del tiempo que se producen en un punto situado en  $b$  inicialmente en  $a_\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ) con respecto a un sistema rectangular de coordenadas y que se mueve al punto  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) con relación al mismo sistema de coordenadas. Considerando una formulación lagrangiana, las deformaciones se pueden expresar en función de las coordenadas convexas,  $a_\alpha$  y el instante  $t$ :

$$x_i = x_i(a_\alpha, t) \quad (B.1)$$

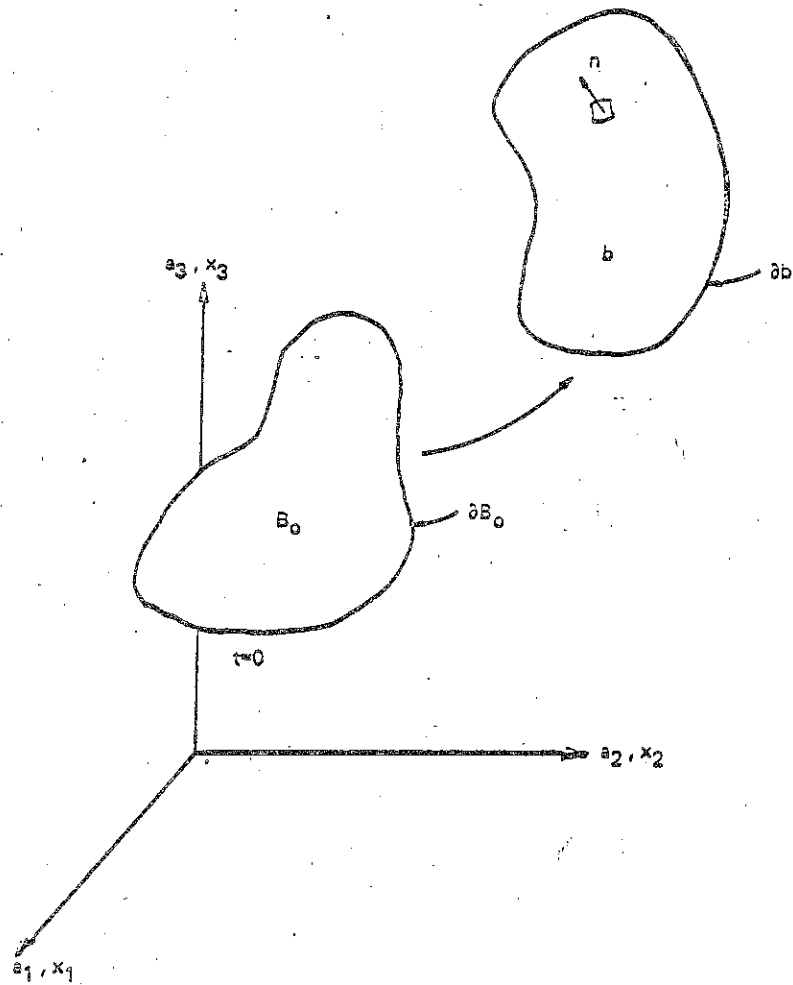


FIGURA B.1 Notación.

En el instante inicial se cumple:

$$\begin{aligned} x_i(a_\alpha, 0) &= a_\alpha \\ \dot{x}_i(a_\alpha, 0) &= u_i(a_\alpha) \quad (\text{velocidad inicial}) \end{aligned} \quad (B.2)$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho x_i \quad (B.3)$$

que en el contorno  $\partial b_1$  satisface las condiciones de fuerzas:

$$\sigma_{ij} n_j = t_i(t) \quad (B.4)$$

y de movimientos en el contorno  $\partial b_2$

$$x_i(a_\alpha, t) = D_i(t)$$

A lo largo de la discontinuidad (contacto)  $\partial b_3$  se satisface, cuando  $x_i^+ = x_i^-$

$$(\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) n_j = 0 \quad (B.5)$$

En estas ecuaciones se denomina  $\sigma_{ij}$  a la tensión de Cauchy,  $\rho$  a la densidad,  $f_i$  la intensidad de las fuerzas distribuidas,  $\ddot{x}_i$  la aceleración. Se indica con una coma la diferenciación covariante y  $n_j$  es la normal exterior al elemento en el contorno  $\partial b$ .

La conservación de la masa se establece de un modo directo como sigue:

$$\rho V = \rho_0 \quad (B.6)$$

con

$$V = ||F_{ij}|| = \left| \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right| \right| = \text{volumen relativo o determinante de la matriz gradiente.}$$

$\rho_0$  es la densidad de referencia.

La ecuación de la energía es:

$$\dot{E} = V \sum_{ij} s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - (p+q) \dot{V} \quad (B.7)$$

en donde  $s_{ij}$  y  $p$  representan las tensiones desviatorias y la presión respectivamente, es decir:

$$p_{ij} = \sigma_{ij} + (p+1)\delta_{ij} \quad (B.8)$$

$$p = -\frac{1}{3} \sum_{ij} \sigma_{ij} \delta_{ij} - q = -\frac{1}{3} \sum_{kk} \sigma_{kk} - q \quad (B.9)$$

En estas ecuaciones,  $q$  es una viscosidad volumétrica que se describirá más adelante y  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecher ( $\delta_{ii} = 1$  y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ).

Las ecuaciones anteriores que corresponden a un problema de condiciones de contorno e iniciales pueden escribirse en formulación débil (variacional o trabajos virtuales). Estas ecuaciones se pueden discretizar según la técnica típica de los elementos finitos, mediante elementos hexaédricos interconectados a puntos nodales en la configuración de referencia y seguir las partículas a lo largo del tiempo, es decir:

$$x_i(a_\alpha, t) = x_i\{a_\alpha(\xi, \eta, \zeta), t\} = \sum_{j=1}^8 \phi_j(\xi, \eta, \zeta) x_i^j(t) \quad (B.10)$$

La función de forma en el hexaedro es:

$$\phi_j = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_j)(1+\eta\eta_j)(1+\zeta\zeta_j) \quad (B.11)$$

con  $\xi_j$ ,  $\eta_j$  y  $\zeta_j$  las coordenadas naturales con valores nodales  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  y  $x_i^j$  es la coordenada nodal en el nudo  $j$  de los nudos apropiados. Se pueden generar elementos desde cuatro a siete nudos (figura B.2) mediante eliminación.

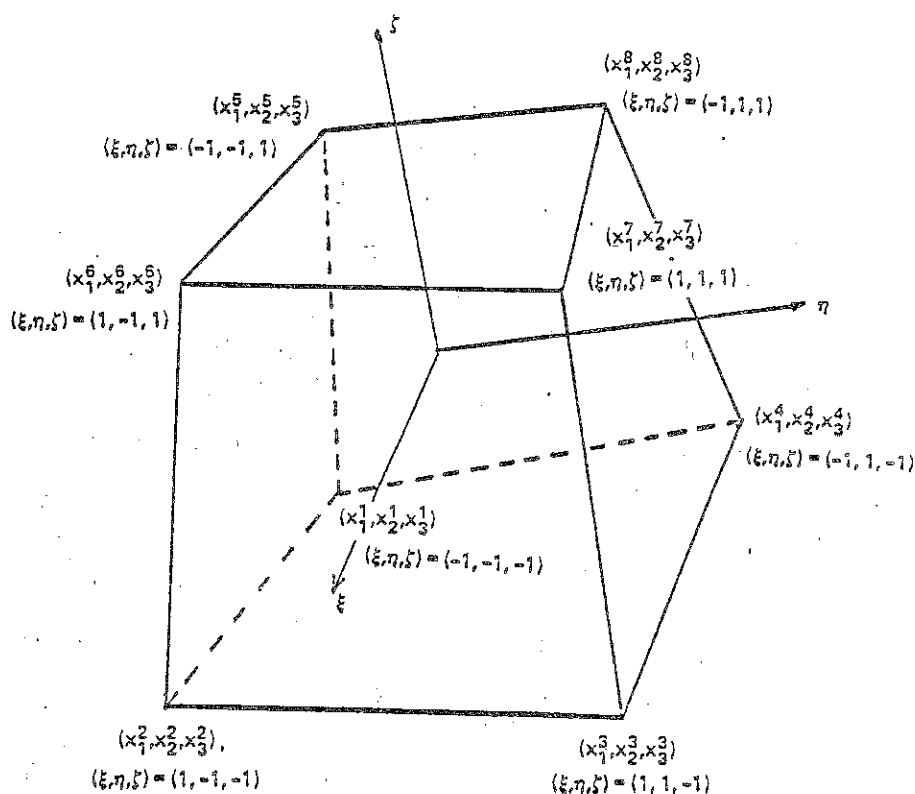


FIGURA B.2 Elemento hexaédrico de ocho nudos.

La aplicación del método de los elementos finitos permite deducir las matrices de rigidez y masa así como las fuerzas exteriores de la ecuación (B.1). Para ello debe llevarse a cabo integraciones de volumen (y de superficie) sobre elementos, del siguiente tipo:

$$\int_V g \, dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{g} |J| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (B.12)$$

La integración se realiza numéricamente mediante la fórmula de Gauss. Un importante ahorro de cálculo y a veces mejores resultados se obtienen si se considera un número reducido de puntos de integración (uno, en el centro de gravedad del elemento, para este caso). Sin embargo, existe la posibilidad en estos casos de aparición de modos espúreos de energía nula (hourglass). Es preciso controlar entonces este fenómeno numérico. Existen con este fin diversos algoritmos -Flanagan-Belytschko (1), Wilkins (2), Koslov y Frasier (3) entre otros- aquí se resume el desarrollado por Hallquist en la publicación citada.

Si  $\sigma_{ik}$  ( $j=1,4$  y  $k=1,8$ ) constituyen la base de vectores del "hourglass" para el elemento hexaédrico, se calculan las fuerzas viscosas resistentes como:

$$f_{ik} = -a_h \sum_{j=1}^4 h_{ij} \sigma_{jk} \quad (i=1,3) \quad (B.13)$$

en donde  $h_{ij}$  se define como la magnitud del modo espúreo

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^8 v_i^k \sigma_{jk} \quad (B.14)$$

y

$$a_h = -Q_{hg} \rho V_e^{2/3} \frac{c}{4}$$

con  $V_e$  es el volumen del elemento,  $c$  es la velocidad del sonido,  $Q_{hg}$  es una constante que se define externamente al cálculo con valores típicos entre 0,05 y 0,15 y  $v_i^k$  es la velocidad modal del nodo  $k$  en la dirección  $i$ .



La aplicación del método de los elementos finitos conduce en el instante  $t = t^n$  a la siguiente ecuación:

$$\underline{M} \underline{a}^n = \underline{p}^n - \underline{F}^n + \underline{H}^n \quad (\text{B.15})$$

en donde  $\underline{M}$  es la matriz de masas (que se diagonaliza por conveniencia de cálculo),  $\underline{p}^n$  incluye la contribución de las fuerzas másicas y de contorno,  $\underline{F}^n$  es el vector divergencia de tensiones y  $\underline{H}^n$  es la resistencia a los modos espúreos. Para avanzar al tiempo  $t^{n+1}$  se utiliza la siguiente integración central en diferencias temporales:

$$\begin{aligned} \underline{a}^n &= \underline{M}^{-1}(\underline{p}^n - \underline{F}^n) \\ \underline{v}^{n+\frac{1}{2}} &= \underline{v}^{n-\frac{1}{2}} + \underline{a}^n \Delta t^n \\ \underline{x}^{n+1} &= \underline{x}^n + \underline{v}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \\ \Delta t^{n+\frac{1}{2}} &= (\Delta t^n + \Delta t^{n+1})/2 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

con  $\underline{v}$  y  $\underline{x}$  los vectores globales de las coordenadas y velocidades de los nudos respectivamente.

En el caso de materiales elasto-plásticos e hiperelásticos las tensiones se integran incrementalmente a lo largo del tiempo:

$$\sigma_{ij}(t+dt) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij} dt \quad (\text{B.17})$$

En esta ecuación y en las siguientes se desprecia la influencia de la viscosidad volumétrica en el tensor de tensiones. La derivada respecto al tiempo se designa por ( $\dot{\phantom{x}}$ ) y  $\sigma_{ij}$  puede expresarse aproximadamente como sigue:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{\nabla} + \sigma_{ik} \Omega_{kj} + \sigma_{jk} \Omega_{ki} \quad (\text{B.18})$$

en donde el tensor rotación es:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{B.19})$$

y la velocidad de tensión Jauman (corotacional) se define como:

$$\sigma_{ij}^{\nabla} = C_{ijk1} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (\text{B.20})$$

En la ecuación (B.20)  $C_{ijk1}$  corresponde a la matriz constitutiva del material y  $\dot{\epsilon}_{kl}$  es el tensor de velocidad de deformación:

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{B.21})$$

Los tensores  $\dot{\epsilon}_{ij}$  y  $\Omega_{ij}$  se evalúan en los centros de los elementos en función de la matriz:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^8 \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} v_i^k$$

Si se define la presión mediante una ecuación de estado como función

del volumen relativo y de la energía o temperatura T, es decir:

$$p = p(V, E) = p(V, T) \quad (B.21)$$

se obtiene los componentes de la tensión desviatoria:

$$s_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + r_{ij}^n + p^n \delta_{ij} + C_{ijhl} \dot{\epsilon}_{ij}^n + \frac{1}{2} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}$$

donde  $\dot{\epsilon}_{ij}^n$  es el tensor de velocidad de deformación desviatoria.

Antes de la ecuación de estado, se calcula la viscosidad volumétrica q y se pone al día la energía interna total, e, del elemento, antes de ser evaluado el valor del tanteo e\*.

$$e^{*n+1} = e^n - \frac{1}{2} \Delta V (p^n + q^n) + V^{n+\frac{1}{2}} s_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \Delta \epsilon_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \quad (B.23)$$

con

$$\Delta V = V^{n+1} - V^n, \quad V^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(V^n + V^{n+1}) \text{ y } V \text{ el volumen del elemento.}$$

$$s_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(s_{ij}^n + s_{ij}^{n+1})$$

$$q^n = \frac{1}{2}(q^{n-\frac{1}{2}} + q^{n+\frac{1}{2}})$$

Es preciso incluir la viscosidad artificial, introducida pioneramente por Neumann y Richtmyer (4) con objeto de evitar las discontinuidades que se producen en la transmisión de la onda de choque, en su frente. El método permite incluir un aumento de la precisión en los elementos de vis

cosidad  $q$ . A cierta distancia del frente de choque la influencia de esta viscosidad es nula. A través del choque las condiciones de salto de Hugoniot siguen siendo válidas con la introducción de esta viscosidad artificial. Detalles pueden verse en Noh (5).

Existe, por otra parte, la exigencia de un intervalo crítico en el tiempo, según el tamaño de cada elemento  $e$

$$\Delta t_c = 0,9 V_e / \{Q + (Q^2 + C^2)^{1/2} A_{e \max}\} \quad (B.24)$$

con

$$Q = Q_2 c + Q_1 V_e |\dot{\epsilon}_{kk}| / A_{e \max}$$

$V_e$  es el volumen del elemento y  $A_{e \max}$  el área de su cara mayor.

Una característica importante en todos los programas de computador que analizan el problema de choques, corresponde a los algoritmos que utilizan en el tratamiento del contacto-impacto. Existen tres métodos distintos desarrollados con este fin:

- Restricciones nodales.
- Penalización.
- Parámetros distribuidos.

Cada uno de ellos será brevemente descrito a continuación. Conviene distinguir en estos métodos, excepto en la penalización, dos tipos de caras, o interficies. La cara maestra y esclava. Cada cara se define co

mo un conjunto de todos los segmentos cuadriláteros y triangulares que la componen. Los nudos de las caras respectivas se denominan maestros y esclavos. Los nudos esclavos están obligados a deslizarse a lo largo de la cara maestra después del impacto y permanecer en ella hasta que se produzca una tracción entre el nudo y la superficie.

En el método de la restricción nodal, las condiciones de contorno se imponen a las ecuaciones globales mediante transformación de las componentes de los movimientos de los nudos esclavos a lo largo de la superficie de contacto. Usando esta transformación se elimina el grado de libertad del nudo esclavo normal a la superficie y se distribuye la fuerza normal sobre los nudos maestros.

Los problemas computacionales aparecen cuando la zonificación de la superficie maestra es más fina que la esclava (figura B.3). Conviene recordar que debido a los grandes movimientos una zonificación inicial adecuada puede modificarse de un modo importante en fases más avanzadas en el tiempo.

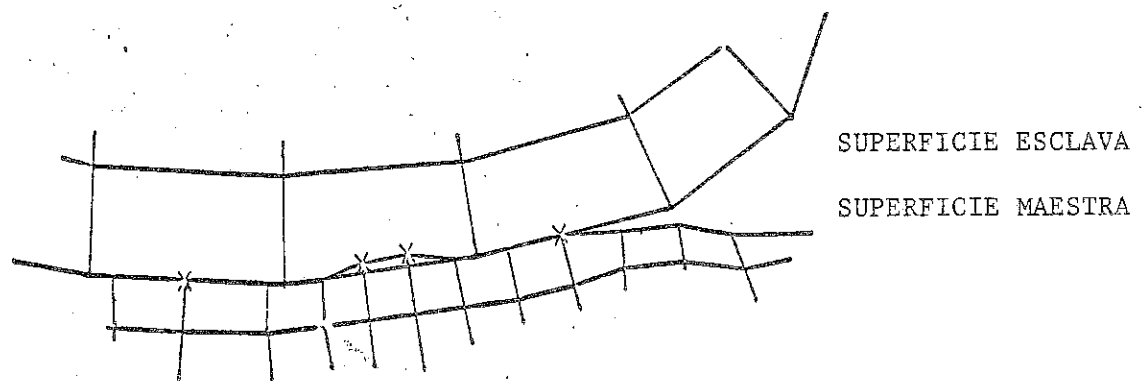


FIGURA 6. Nudos en la superficie deslizante maestra designados con "X" son tratados con nudos de superficie libre en el método de la restricción nodal.

El método de la penalización consiste en colocar muelles elásticos normales a las interfaces entre los nudos que penetran y la superficie de contacto. La constante de muelle depende del espesor y módulo volumétrico del elemento. En un método fácil de implementar en el cálculo, y no introduce problemas numéricos de "hourglass". Sin embargo cuando la presión de contacto es muy grande pueden aparecer penetraciones inaceptables. Es posible, reescalar el tiempo o incrementar la rigidez del muelle pero a costa de un mayor esfuerzo de cálculo.

El método del parámetro distribuido, se distribuye la mitad de la masa del elemento esclavo en contacto sobre el área de la superficie maestra cubierta. También las tensiones internas. Después de realizar estas distribuciones se pone al día la aceleración de la superficie maestra. Se introducen restricciones a las aceleraciones y velocidades de los nudos esclavos para que sus movimientos permanezcan en la superficie maestra. No se permite en ningún caso a estos nudos penetrar, como en los problemas hidrodinámicos, y los problemas lógicos de vuelta atrás desaparecen con esta actuación.

La descripción pormenorizada de estos procedimientos específicos del análisis contacto-impacto, pueden verse en (6) .

REFERENCIAS

- (1) FLANAGAN, D.P. y BELYTSCHKO, T. "A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control". *International Journal of Numerical Methods Engineering* 17, 679-706 (1981).
- (2) WILKINS, M.L.; BLUM, R.E. et al "A Method for Computer Simulation of Problems in Solid Mechanics and Gas Dynamics in Three Dimensions and Time" Universidad de California. Lawrence Livermore Laboratory Rept. UCRL-51574. Rev. 1 (1975).
- (3) KOSLOV, D. y FRAZIER, G.A. "Treatment of Hourglass Patterns in Low Order Finite Element Codes". *Int. Journ. Num. and Anal. Methods in Geomechanics*. V. 2 (1978).
- (4) VON NEUMAN, J. y RICHTMYER, R.D. "A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamical Shocks". *J. Appl. Phys.* 21, p.232 (1950).
- (5) NOH, W.F. "Numerical Methods in Hydrodynamic Calculation". University of California, Lawrence Livermore Laboratory, Rept. UCRL-52112 (1976).
- (6) HALLQUIST, J.O. "Theoretical Manual for DYNA 3D". Lawrence Livermore Laboratory UCID-19401. Publicación provisional. Junio (1982).

## APENDICE C.- PROGRAMAS DE COMPUTADOR DE SIMULACION DEL IMPACTO TRIDI- MENSIONAL

### C.1 INTRODUCCION

Hasta fecha reciente únicamente se habian desarrollado programas de computador para estudiar el impacto mono y bidimensional. La aparición de los computadores de la tercera y cuarta generación (CDC-7600 y CRAY-1 entre otros) han permitido la realización de cálculo tridimensionales dentro de unos límites económicos atractivos.

A continuación se indican de un modo sumario los codigos de computador existentes en la actualidad. Algunos han sido comentados en el texto del informe, pero aquí se resumen características, nombre de la organización responsable y algunos otros datos de interés.

Conviene tener presente la necesidad en el cálculo del impacto de disponer programas pre y postprocesadores adecuados con objeto de manejar de forma eficiente la enorme cantidad de datos y resultados que se obtienen.

La mayoría de los programas que se reseñan han sido diseñados para la solución de problemas de impacto particulares y su documentación es escasa, y carece de una comercialización adecuada. Se hace preciso en general, el trabajo de varios meses de un analista para conseguir el programa operacional en una instalación (main-frame) adecuada y es recomendable una comunicación intensa ya con los autores del pro



grama o bien con usuarios que tengan una amplia experiencia en el mismo.

Los programas dinámicos presentados resuelven problemas de las siguientes características (situaciones de impacto):

- (a) Presencia de ondas de choque (alternativamente aparición de saltos de tensiones y velocidades).
- (b) Respuesta localizada del material (en contraste con el comportamiento global de la estructura).
- (c) Tiempo de actuación de la carga y la respuesta en el rango de submilisegundo.

Por consiguiente los programas comparten las siguientes características:

- (1) Integración en el tiempo de las ecuaciones dinámicas mediante diferencias finitas y en general centradas. El tamaño del paso de tiempo se controla por la condición de estabilidad de Courant.

$$\Delta t \leq \frac{k \cdot l}{c}$$

siendo  $l$  la dimensión de la característica de la malla,  $c$  la velocidad local del sonido (que varía con la presión) y  $k$  una constante menor que la unidad que especifica el usuario

denominada factor de estabilidad. Generalmente se elige un valor comprendido entre 0,6 y 0,8.

- (2) Las ecuaciones constitutivas de los materiales se desacoplan en los efectos volumétricos y de cortante. Los primeros se estudian a partir de la ecuación de estado. En el rango subsonico de interés en el choque de barcos, se considera la ecuación de Mie-Cruneisen y en otras situaciones la ecuación de estado de Tillotson. Los efectos de corte se analizan fundamentalmente en materiales metálicos mediante ecuaciones constitutivas elasto-plásticas incrementales. En particular se considera el criterio de von Mises con la inclusión de los fenómenos de endurecimiento, velocidad de deformación, etc. Mas recientemente, otros tipos de materiales y, por lo tanto, de ecuaciones constitutivas se tienen en cuenta y que son de aplicación a suelos, hormigón y líquidos. En algunos programas, el usuario puede incluir, su voluntad, las ecuaciones constitutivas pertinentes.
- (3) Los modelos de rotura del material, son simples, dado el relativamente poco desarrollado estado de conocimiento actual. En el caso de choque de barcos, esta deficiencia no es relevante en los resultados, ya que el interés del análisis se centra en el comportamiento del sistema previo de colapso estructural.

- (4) Los programas son relativamente largos, con un número superior a 10.000 sentencias FORTRAN que se dedican la mayoría al tratamiento lógico de las líneas de deslizamiento, entrada-salida, transporte de material, etc. y el resto, al planteamiento de la física básica del problema que es relativamente muy breve.

Se utiliza como regla coordenadas cartesianas y tensiones de viscosidad artificial para reducir los efectos numéricos del frente de onda sobre la malla. Todos los programas presentan por razones de economía de recursos de la instalación la posibilidad de parada y recomienzo, dado el tiempo excesivo de computación que precisan.

## C.2 CODIGOS LAGRANGIANOS

### 1. HEMP3D

- (a) Desarrollo. M.L. Wilkins y Associates

Lawrecen Livermore National Laboratories  
Livermore. California.

- (b) Documentación. Referencia (1).

- (c) Discretización. Diferencias finitas de segundo orden.

(d) Características del programa.

-Superficies de deslizamiento con posibilidad de apertura y cierre de acuerdo con las fuerzas actuantes en la interfase.

-Preprocesador VMESH3D con capacidad semiautomática de rezonificación.

-Postprocesador interactivo VPIx3D, que genera perspectiva de los cuerpos, con supresión de líneas ocultas, ampliación de detalle etc. Dibujos con color o con diferente tonalidad de acuerdo con los resultados. Permite comprobar asimismo la entrada de datos.

(c) Comentarios.

Excelente documentación de la física básica del programa así como de las ecuaciones constitutivas que utiliza. Deficiente información acerca del tratamiento de las superficies deslizantes, limitaciones del programa y requisitos de memoria de computadores. Este programa está implementado en los ordenadores CDC-7600 y CRAY y STAR. Existen cursos intensivos de enseñanza de la utilización del programa en el Lawrence Laboratorio.

2. EPIC-3

(a) Desarrollo. G.R. Johnson

Honeywell, Inc.

Defense Systems Division

Hopkins, Minnesota

(b) Documentación. Referencias (2), (3), (4), (5) y (6).

(c) Discretización. Utiliza elementos finitos tetraedricos y triangulares que presenta una mayor rigidez a la distorsión que los correspondientes elementos paralelepípedos y cuadrilateros, lo que es ventajoso en un análisis lagrangiano. Esta ventaja tiene la contrapartida de introducir disimetrías en el cálculo y una rigidez artificial, que puede aminorarse mediante mallas finas y una adecuada disposición de elementos. Conduce a buenos resultados en problemas de impacto a elevadas velocidades pero no cuando el choque corresponde a bajas velocidades como es el caso de choque de barcos contra pilas de puentes.

(d) Características del programa.

-Superficies de deslizamiento que permite introducir rozamiento, aperturas y cierres, colapso y erosión del material esclavo. El tratamiento lógico de esta superficie es muy claro y se encuentra bien documentado.

-Preprocesador muy rápido que permite generar automáticamente mallas para placas rectangulares y circulares, esferas solidas o huecos y otras figuras geométricas simples.

-Postprocesador es muy extenso con salida en forma de gráficos en trazados CALCOMP o pantalla Tektronix. Líneas de nivel y las historias temporales de resultados son algunas de las posibilidades de este postprocesador.

(e) Comentarios

Se encuentra implementado en numerosos computadores (UNIVAC 1108, Honeywell 6080, CDC 6600, CED 7600 y CRAY). La versión actual esta vectorizada (a excepción de la subrutina ASTRESS que corresponde al modelo anisotropo). Con tituye un programa altamente modular y rápido de ejecución. En el caso material isotrópo y sin superficie de deslizamientos del orden de  $1,5 \times 10^{-3}$  seg/nudo/ciclo en un computador CDC-7600.

3. DIYNA3D

(a) Desarrollo. J.O. Hallquist

Lawrence Livermore National Laboratory

Livermore, California

(b) Documentación. Referencias (7), (8), (9), (10), (11) y (12).

(c) Discretización. Utiliza en la actualidad unicamente elementos finitos cuadrilateros de cuatro, seis u ocho nudos, con su contrapartida en 3-D en elementos paralelepípedicos.

(d) Características del programa.

Superficies de deslizamiento con una lógica muy extensa y bien documentada. Como es típico en los códigos lagrangianos es preciso definir nudos (o superficies) maestros y esclavos. El programa permite deslizamiento con o sin rozamiento. Separación de superficies y contacto se pro

duce automáticamente sin necesidad de intervención del usuario. Existen las posibilidades de deslizamiento sin separación y fijo (sin separación ni deslizamiento). Esta última posibilidad permite un cambio perpetuo en la zonificación al mismo tiempo que asegura la compatibilidad de movimientos en la interfase. Es también útil en los casos de dos superficies que impactan y permanecen en contacto, sin movimiento relativo, hasta que se satisface algún criterio impuesto por el usuario. Existen también barreras rígidas y no existe límite en la lógica acerca del número, tipo y orientación de las interfases. En el apéndice B se ha mostrado las características de este programa con mayor detalle.

Preprocesador. Existe un generador automático de mallas relativamente reciente.

Postprocesador DINAP permite obtener dibujos de los sucesivos resultados del DINA3D, en particular, medidas de deformaciones de Lagrange y Almansi, velocidades de deformación, movimientos de sólido rígido y velocidades y aceleraciones. El postprocesador GRAPE (13) se usa asimismo con este programa para generar dibujos de deformación.

(e) Comentarios.

Es un programa en desarrollo constante y operacional en CDC-7600 y CRAY. Todo el cálculo se realiza en memoria central, lo que permite alcanzar velocidades impresionantes. (4,67 de CPU/ $10^6$  malla ciclos en CDC-7600 que se reduce a 0,67 en el CRAY). Es capaz de manejar en esta situación del orden de 10.000 elementos en el CDC-7600 y hasta 30.000 en

el CRAY. Es el programa que se recomienda por el autor de este informe dada la accesibilidad y conocimiento personal que mantiene con el Dr. Hallquist.

### C.3 Códigos eulerianos

#### 1. HULL

(a) Desarrollo. D.A. Matriska y R.E. Durrett

Orlando Technology. Inc.

Shalimar, Florida

(b) Documentación. Referencias (14) y (15).

(c) Discretización. Un esquema en diferencias finitas de segundo orden muy aproximado.

(d) Características del programa.

Rezonificación. Existe un programa que permite una traslación continua de la malla de cálculo con una velocidad continua según una o todas las direcciones coordenadas.

Preprocesador denominado KEEL define las condiciones iniciales, las coordenadas de la malla y las propiedades de los materiales. Estos últimos se generan automáticamente para mas de 35 materiales (sólidos, líquidos y gaseosos) al indicar simplemente el número del material. Los



generadores de malla permiten la construcción automática de mallas finas en regiones de interés con incremento gradual de su longitud característica a medida que se aleja de la región crítica.

El programa KEE1 incluye configuraciones geométricas típicas para inserción de materiales, trazadores de partículas y estaciones para recogida de datos del campo de flujo.

Postprocesador PULL es capaz de generar tres tipos de gráficos: Una variable del campo de flujo (densidad, presión, energía, etc) función de las coordenadas espaciales, hasta 20 contornos de las anteriores variables y gráficos de las cantidades vectoriales indicando su dirección y magnitud. Por otra parte PULL, produce historias temporales de las diferentes variables. Puede indicarse que el postprocesador es muy completo pero no puede aun admitirse como un producto terminado y se encuentra actualmente en fase de revisión y puesta a punto. El programa PULL esta soportado por el trazador Carlson SX4020, el sistema META y los perifericos CALCOMP.

(e) Comentarios

El sistema HULL constituye uno de los sistemas mas complejos de análisis del impacto, con una gran red de usuarios, que transmiten sus respectivas experiencias y desarrollos. El sistema esta dividido en los siguientes programas: KEEL (generador de condiciones iniciales y malla), HULL (programa en diferencias finitas), PULL (paquete gráfico), BOW (libreria del problema), PLANK (un generador de la entrada de datos,

alternativa para SAIL), CONTROL (Un interactivo programa que supervisa el estado del cálculo) y SAIL (un procesador ejecutivo y manejador del sistema de ficheros).

En una aplicación concreta el sistema selecciona las rutinas y opciones apropiadas para su ejecución, con objeto de minimizar los requisitos de memorias de almacenamiento. El sistema HULL esta implementado en los siguientes tipos de computadores CDC(6400, 6500, 6600, 7600 CYBER 176), IBM (360, 370) y CRAY con sistemas operativos CDC SCOPE 2.0, 3.4 e IBM )S/VS2. Recientemente ha sido instalado en DECVAX.

## 2. TRIOIL/TRIDORF

(a) Desarrollo. W.E. Johnson

Computer Code Consultants

Los Alamos, New México

(b) Documentación. Referencias (16), (17), (18) y (19).

(c) Discretización.

Utiliza diferencias finitas tanto en el tiempo como en el espacio. TRIOL ha sido configurado en 1975 para ser procesado en el computador - ILLIAC IV y se denomina esa versión TRIOL IV. Los programas se limitan a dos materiales y a un máximo de celdas de 64x70x70 en las direcciones - coordenadas correspondientes. Un ciclo de cálculo completo consiste en tres barridos computacionales sobre la malla, uno en cada dirección. El orden de las direcciones de estos barridos de cálculo se permutan con

objeto de evitar flujo de masas en direcciones preferenciales.

(d) Características del programa

Rezonificación que permite movimiento y expansión de la malla para mantener la finura de esta en zonas de máxima actividad.

Preprocesador que genera materiales y formas geométricas simples y su combinación para engendrar geometrías complicadas.

Posprocesador caracterizado por los distintos paquetes existentes y propiedad de los laboratorios de los Alamos y Livermore.

(e) Comentarios

Los dos programas anteriores estan contenidos en memoria central y pueden ser procesados en los siguientes computadores CDC 7600, UNIVAC 1108, el minicomputador VAX y CRAY, si bien en este último la versión no esta vectorizada.

### 3. METRIC

(a) Desarrollo. L.J. Hageman y E.P. Lee

Systems, Science and Software, Inc.

La Jolla, California

(b) Documentación. Referencias (20) y (21)

(c) Discretización

Utiliza un esquema en diferencias finitas de primer orden que se encuentra bien documentado en las referencias.

(d) Características del programa.

Rezonificación no existe.

Preprocesador que genera propiedades de materiales mediante un sólo número (19 sólidos) así como cuerpos geométricos simples que se pueden combinar en configuraciones complejas.

Postprocesadores que permiten dibujar mapas y gráficos mediante pe riféricos CALCOMP.

(e) Comentarios

Las superficies libres y las interfases se mantienen mediante una prescripción especial del transporte de partículas. Existen limitaciones en el número de celdas de la malla existente en memoria principal precisando transvase desde y a la memoria periférica. Existen fronteras refle xivas o transmisoras, así como rígidas.

5. K3

(a) Desarrollo. J. May, P. Snow, D. Williams y W. Windholz

Kaman Sciences Corp.

Colorado Springs, Colorado

(b) Documentación. Referencias (22), (23) y (24).

(c) Discretización: Se utilizan diferencias finitas.

(d) Características del programa

Rezonificación no existe.

Preprocesadores como PRED3 y KSGEN generan los paquetes geométricos necesarios así como las fichas de control para el comienzo y recomienzo de las cintas. Formas geométricas simples que pueden ser combinadas en configuraciones complejas se obtienen mediante este procesador.

Postprocesador K3 PLT constituye un paquete gráfico, que actualmente, esta limitado al sistema en color BMDATC.

(e) Comentarios

El programa esta configurado en la actualidad para ser procesado en un CDC 7600. Esta limitado a 80 líneas en cada dirección coordenada, 10 materiales y 40 variables por celda. La documentación se encuentra en fase de elaboración.

## REFERENCIAS

- (1) WILKINS, M.L., BLUM, R.E., CRONSHAGEN, E. and GRANTHAM, P. Lawrence Livermore Laboratory. UCRL-51574, Rev. 1 (1975).
- (2) JOHNSON, G.R. COLBY, D.. and VAVRICK, D.J. Air Force Armament Laboratory. AFATL-TR-78-81. (1978).
- (3) JOHNSON, G.R., COLBY, D.D. and VAVRICK, D.J. Int. J. Num. Methods Eng. 14 (1979).
- (4) JOHNSON, G.R., VAVRICK, D.J. and COLBY, D.D. Ballistic Research Laboratory ARBRL-CR-00429. (1980).
- (5) JOHNSON, G.R. Proc. Third International Symp. on Ballistics, Karlsruhe, W. Germany. (1977).
- (6) JOHNSON, G.R. Ballistic Research Laboratory, BRL-CR-43. (1977).
- (7) HALLQUIST, J.O. Lawrence Livermore Laboratory, UCID-17268, Rev. 1 (1979).
- (8) HALLQUIST, J.O. Lawrence Livermore Laboratory, UCRL-52066. (1976).
- (9) HALLQUIST, J.O. en K.C. Park and D.K. Gartling (Eds.), Computational Techniques for Interface problems, AMD-30, ASME, New York. (1978)

- (10) HALLQUIST, J.O. (Lawrence Livermore Laboratory, UCRL-52429. (1978).
- (11) HALLQUIST, J.O. Lawrence Livermore Laboratory, UCRL-52678. (1979).
- (12) GOUDREAU, G.L., and HALLQUIST, J.O. in Proc. 5th International Seminar on Computational Aspects of the Finite Element Method. Berlin, W. Germany (también-Lawrence Livermore National Laboratory Reprint UCRL-82858) (1979).
- (13) BROWN, B. Lawrence Livermore Laboratory, UCID-18507. (1980).
- (14) DURRETT, R.E. and MATUSKA, D.A. Air Force Weapons Laboratory, AFATL-TR-78-125. (1978).
- (15) GABY, L.P. Air Force Weapons Laboratory, C4-C-4041. (1978).
- (16) JOHNSON, W.E. General Atomic, GAMD 7310. (1967).
- (17) JOHNSON, W.E. Computer Code Consultants, CCC-976. (1976).
- (18) JOHNSON, W.E. Ballistic Research Laboratory, BRL-CR-338. (1977).
- (19) REDD, L.L., and HENDERSON, D.R. (1975) Defense Nuclear Agency. DNA 3865T (AD-A027091).

- (20) HAGEMAN, L.J., and LEE, E.P. *Ballistic Research Laboratory*, BRL-CR-305 (1976).
- (21) HAGEMAN, L.J., WADDELL, J.L., and HERRMANN, R.G. *Systems, Science and Software*, SSS-R-76-2973. (1976).
- (22) MAY, J. SNOW, P., WILLIAMS, D., and WINDHOLZ, W. *Kaman Sciences Corp.* K-80-226(R).
- (23) THOMPSON, S.L., *Sandia Laboratories*, SAND-74-0122. (1975).
- (24) THOMPSON, S.L., *Sandia Laboratories*, SAND-77-1339.



## APENDICE D.- INTERACCION FLUIDO-ESTRUCTURA

### D.1 INTRODUCCION

En el impacto de embarcaciones contra pilas de puentes es muy importante considerar el comportamiento dinámico del fluido. Este tipo de análisis de interacción fluido estructura se suelen denominar problemas acoplados. El método de los elementos finitos ha sido desarrollado para el cálculo numérico de los sistemas sólido-fluido. Existen tres categorías de procedimientos básicos de cálculo: (a) Aproximación mediante masas añadidas, (b) Formulación euleriana, (c) Formulación lagrangiana.

En el procedimiento de la masa añadida se añade una fracción de la masa del fluido al modelo estructural en la interfase entre los dos materiales como se plantea en (1). Este procedimiento fué utilizado en los correspondientes apartados sobre métodos aproximados reseñados en el capítulo 2 de este informe. La hipótesis usual para la determinación de esta masa añadida se basa en admitir el fluido incompresible y la estructura flexible. Este procedimiento desprecia los efectos de rigidez del fluido y en general conduce a resultados conservadores. Constituye un procedimiento simple de análisis que se ha utilizado en la obtención de resultados prácticos en estructuras bi y tridimensionales (2) y (3).

En el procedimiento euleriano el comportamiento del fluido se expresa en función del potencial de presión y puede ser representado mediante funciones analíticas -en el caso de contornos geométricos sencillos- o bien numéricamente mediante una malla de elementos finitos, que conside-

ra como incógnita básica la presión nodal. La solución del sistema acoplado se alcanza mediante la resolución de dos sistemas de ecuaciones de un modo separado y los efectos de interacción se consiguen mediante iteraciones. Los dos sistemas pueden ser resueltos de un modo conjunto, sin necesidad de iteración pero la matriz de coeficientes deja de ser simétrica en este caso. En cualquier caso este procedimiento de cálculo exige la elaboración de programas específicos de computador. Por otra parte, el sistema acoplado conduce a un sistema de ecuaciones con un ancho de banda muy grande a causa de la interfase. No obstante este procedimiento euleriano de ataque al problema acoplado es el mas usual en la practica de la ingeniería a pesar de las desventajas apuntadas.

En el método lagrangiano, se expresa el comportamiento del fluido en función de los movimientos de los nudos. Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad se satisfacen automaticamente a lo largo de los nudos situados en la interfase entre sólido y fluido. La principal ventaja de este procedimiento reside a la posibilidad de utilización directa y sin modificación de los programas generales existentes basados en la formulación en movimientos del método de los elementos finitos que han sido comentados en el capítulo 3. Presenta el inconveniente de utilizar mayor número de incógnitas (doble o triple según sea el problema bi o tri dimensional) que en la situación euleriana.

Se han propuesto diferentes elementos lagrangianos, la mayoría de los cuales sufren la existencia de modos de deformación con energía nula. En los problemas para los que estos modos no son excitados se obtienen resultados excelentes. Sin embargo, a medida que se refina la malla

en elementos finitos, la probabilidad de aparición de estos modos de de formación con energía nula o "hourglass" se hace mayor. Ello es debido a que estos modos se producen por la introducción de módulo de cortante nulo en combinación con una integración numérica reducida. La solución consistente en utilizar elementos de orden alto, que tienden a incrementar su rigidez presentan, por otra parte, el inconveniente de eliminar los modos de baja frecuencia que son precisos para captar los movimien-  
tos de chapoteo del fluido.

En este apéndice se resume la técnica euleriana usual para el aná-  
lisis de la interacción fluido-estructura y se presenta el reciente ele-  
mento lagrangiano desarrollado por Wilson que elimina de un modo selec-  
tivo los modos de energía nula y se comporta de un modo óptimo.

## D.2 PROCEDIMIENTO EULERIANO

Se supone que los movimientos son pequeños, por lo que la ecuación diferencial que rige la distribución de presiones (p) durante las osci-  
laciones de pequeña amplitud en el fluido es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (D.1)$$

siendo c la velocidad de las ondas y se han omitido los términos visco-  
sos (de amortiguamiento).

En el contorno, p está especificado o bien en alguna parte de este  
escrito un sólido -como es el caso de interacción solido-fluido- se co-

noce el movimiento prescrito:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_n) \quad (D.2)$$

en donde  $n$  es la normal a la interfase y  $u_n$  es la componente normal del movimiento de la estructura (D.1).

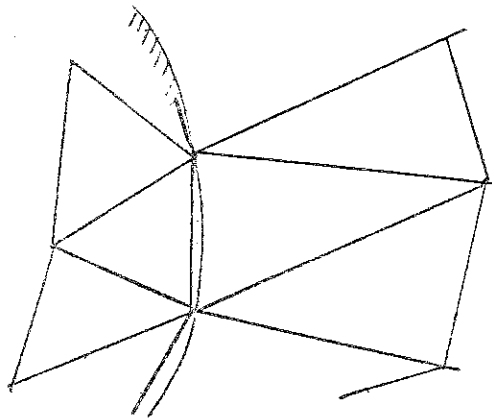


FIGURA D.1 Interfase sólido líquido

El problema constituido por las ecuaciones (D.1) y las de contorno pertinentes puede discretarse mediante una subdivisión de la región del fluido en elementos finitos y se llega a la ecuación típica del método:

$$\underline{G} \underline{\ddot{p}} + \underline{H} \underline{p} + \underline{\bar{f}}_f = 0 \quad (D.3)$$

en donde las matrices  $\underline{G}$  y  $\underline{H}$  se obtienen de la forma usual, es decir:

$$\underline{G} = \sum_e \underline{G}_e \quad ; \quad \underline{H} = \sum_e \underline{H}_e \quad (D.4)$$

siendo

$$\underline{G}_e = \int_{V_e} (\nabla N)^T (\nabla N) dv$$

$$H_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} N^T N dv$$

Las sumas de la expresión (D.4) se extienden a todos los elementos (e) de volumen  $V_e$  y se efectúan de forma booleana. Las funciones de forma son:

$$p(x,y,z) = \underline{N} \underline{p} \quad (D.5)$$

en donde  $\underline{N}$  es un vector, de dimensión  $1 \times n$ , de funciones de interpolación de un elemento de  $n$  nudos y  $\underline{p}$  es el vector de los valores incógnitas de las presiones  $p$  en esos  $n$  nudos.

Por otra parte de operador nabla  $\nabla$  se expresa:

$$\nabla^T = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

El vector  $\bar{f}_f$  no contiene ninguna contribución de las integrales de volumen, puesto que esta formada por integrales de contorno correspondientes a las condiciones naturales, del tipo (D.2), es decir:

$$\bar{f}_f = \sum_e \bar{f}_{f_e} \quad (D.6)$$

con

$$\bar{f}_{f_e} = \int_{S_e} N^T \left( \rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \right) dS$$

En el caso más general de ecuación del movimiento (D.3) deberían ser añadidos términos con derivada primera temporal de  $\underline{p}$ . Estos términos procederán de los efectos viscosos del fluido en su movimiento o si existen contornos del fluido que no reflejan las ondas de presión incidentes. Estos últimos contornos son importantes en la simulación numérica de fluidos infinitos (contornos absorbentes).

Por otra parte el problema dinámico estructural se expresa como es bien conocido, en la forma siguiente:

$$\underline{m} \ddot{\underline{U}} + \underline{c} \dot{\underline{U}} + \underline{k} \underline{U} + \bar{\underline{f}}_s + \underline{r} = 0 \quad (\text{D.7})$$

en donde el vector de campo (movimientos  $\underline{u}$ ) se expresa dentro de cada elemento finito de la estructura mediante las funciones de forma  $N^*$ , es decir:

$$\underline{u} = \underline{N}^* \underline{U} \quad (\text{D.8})$$

en donde  $\underline{U}$  corresponden a los movimientos a los nudos (parámetros nodales).

Las matrices de la estructura  $\underline{m}$ ,  $\underline{c}$  y  $\underline{k}$  corresponden a la masa, amortiguamiento y rigidez. Los términos de fuerzas se han descompuesto en dos partes, una externa  $\underline{r}$  que se supone que esta especificada independientemente y otra  $\bar{\underline{f}}_s$  que corresponde a las presiones incógnitas en la interfase. Su expresión es:

$$\bar{f}_s = \sum_e \int_s \bar{N}_e^T p \, ds = \int_s \bar{N}^T p \, ds \quad (D.9)$$

con  $s$  el area total de la interfase y  $\bar{N}$  la componente, de las funciones de forma  $N^*$  proyectadas según la normal  $n$  a la superficie de la interfase, es decir:

$$u_n = \bar{N} \underline{U} \quad (D.10)$$

si se introduce (D.10) en (D.6) se obtiene:

$$\bar{f}_f = (\int_s \bar{N}^T \rho \bar{N} \, dS) \ddot{\underline{U}} = \underline{S} \ddot{\underline{U}} \quad (D.11)$$

siendo

$$\underline{S} = \rho \int_s \bar{N}^T \bar{N} \, dS$$

De un modo análogo la expresión (D.9) se convierte en la siguiente al considerar (D.5):

$$\bar{f}_s = (\int_s \bar{N}^T N \, dS) \underline{p} = \frac{1}{\rho} \underline{S}^T \underline{p} \quad (D.12)$$

Combinando las ecuaciones (D.3), (D.7), (D.11) y (D.12) se conduce al sistema matricial acoplado de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \underline{G} \ddot{\underline{p}} + \underline{H} \dot{\underline{p}} + \underline{S} \ddot{\underline{U}} &= 0 \\ \underline{m} \ddot{\underline{U}} + \underline{c} \dot{\underline{U}} + \underline{h} \underline{U} + \frac{1}{\rho} \underline{S}^T \underline{p} + \underline{r} &= 0 \end{aligned} \quad (D.13)$$

Como se ha indicado, es posible la resolución, bien iterativa o ya directa, de la ecuación acoplada (D.13). Sin embargo, en el caso de fluido incompresible ( $c = \infty$ ) y el primer término  $\underline{G}$  se anula, con lo que la ecuación primera de la (D.13) se resuelve directamente como sigue:

$$\underline{P} = -\underline{H}^{-1} \underline{S} \ddot{\underline{U}} \quad (D.14)$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda de las ecuaciones (D.13) se obtiene la ecuación del movimiento de la estructura:

$$(\underline{m} - \frac{1}{\rho} \underline{S}^T \underline{H}^{-1} \underline{S}) \ddot{\underline{U}} + \underline{c} \dot{\underline{U}} + \underline{k} \underline{U} + \underline{r} = 0$$

Se observa que el comportamiento dinámico de la estructura viene regido por la ecuación usual introduciendo un término de "masa añadida" o acompañante del fluido con el movimiento de la estructura. El valor de esta masa añadida es:

$$\underline{\bar{m}}_a = - \frac{1}{\rho} \underline{S}^T \underline{H}^{-1} \underline{S} \quad (D.15)$$

### D.3 PROCEDIMIENTO LAGRANGIANO

Dentro de este método se expone la técnica numérica desarrollada en (6) y que supone la introducción de restricciones a la rotación del fluido en los puntos de integración de cada elemento. En particular, se comenta el funcionamiento de elemento fluido lagrangiano de nueve nudos con 2x2 puntos de integración que con las cuatro restricciones a la rotación en estos puntos de Gauss constituye un elemento básico muy eficiente.



El elemento propuesto por Wilson en la citada comunicación se basa en una formulación en la cual las deformaciones del fluido se calculan a partir de las ecuaciones lineales de deformación-movimientos. La única energía de deformación considerada esta asociada con la compresibilidad del fluido. La energía cinética se basa en el movimiento del fluido aproximado mediante las funciones de desplazamiento del método de los elementos finitos. El cambio de la energía potencial producido por el chapoteo de baja frecuencia se incluye en la formulación. Asimismo el campo de movimientos se restringe a ser irrotacional mediante la introducción de una rigidez rotacional.

La deformación volumétrica  $e$  y la presión del fluido (igual a la tensión media) estan relacionados mediante la expresión:

$$p = C_{11} e \quad (D.16)$$

$$\text{con } e = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} \quad (D.17)$$

en función de las derivadas  $(u_{i,j})$  de la componente  $u_i$  del movimiento respecto a la dirección  $j$ .

Las rotaciones se definen como sigue:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{2}(u_{y,z} - u_{z,y}) \\ e_y &= \frac{1}{2}(u_{z,x} - u_{x,z}) \\ e_z &= \frac{1}{2}(u_{x,y} - u_{y,x}) \end{aligned} \quad (D.18)$$

Las fuerzas y rigideces asociadas con estas rotaciones son:

$$\begin{aligned} p_x &= C_{22} e_x \\ p_y &= C_{33} e_y \\ p_z &= C_{44} e_z \end{aligned} \tag{D.19}$$

La selección de estas constantes debe de ser tal que produzcan rotaciones nulas y la energía asociada con la misma asimismo cero. Sus valores deben ser elevados para conseguir estos efectos. Se recomienda el orden de 100 veces el valor de  $C_{11}$ , con objeto de no producir con valores mayores problemas en la computación.

La energía total de deformación del fluido es:

$$U = \frac{1}{2} \int \underline{e}^T \underline{C} \underline{e} dV \tag{D.20}$$

con  $\underline{e}^T = (e, e_x, e_y, e_z)$  y  $\underline{C}$  una matriz diagonal con elementos los valores de  $C_{ii}$  definidos anteriormente.

La energía potencial de las ondas superficiales se determina de acuerdo con las siguientes consideraciones. Es conocido que un comportamiento importante de los fluidos reside en su capacidad de desplazarse sin cambiar de volumen. Por ejemplo en depositos y pantanos se producen ondas (chapoteo) que constituyen movimientos en la dirección vertical. Estas ondas, en una condición estacionaria, supone un intercambio armónico entre las energías cinética y potencial del fluido. Son

ondas de baja frecuencia que incluyen modos incompresibles de movimientos que producen grandes desplazamientos verticales en la superficie. Este movimiento de chapoteo se muestra en la figura D.2.

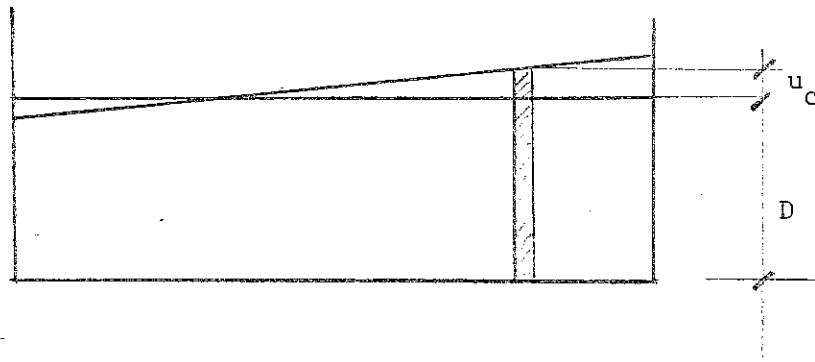


FIGURA D.2 Energía potencial de las ondas de chapoteo.

El peso de la columna líquida de área  $dA$  y altura  $D + u_c$  es:

$$df = w(D + u_c) dA$$

con  $w$  el peso específico del agua.

El movimiento vertical medio de esta columna es  $u_c/2$ , por lo que resulta el siguiente incremento de energía potencial:

$$V_c = \frac{1}{2} \int u_c w(D + u_c) dA$$

o bien

$$V_c = \frac{1}{2} \int u_c w D dA + \frac{1}{2} \int u_c^2 w dA \quad (D.21)$$

La primera integral de (D.21) representa el peso del fluido que

normalmente se evalúan como una integral sobre el volumen del elemento en lugar de una integral de superficie.

La segunda integral producirá términos superficiales de la matriz de rigidez.

La energía cinética del fluido viene dada por la expresión:

$$T = \frac{1}{2} \int m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dV \quad (D.22)$$

en donde  $m$  es la densidad del fluido y  $v_i$  es la componente según la dirección  $i$  del campo de velocidades. La ecuación (D.22) puede escribirse en la forma matricial:

$$T = \frac{1}{2} \int \underline{v}^T \underline{m} \underline{v} dV \quad (D.23)$$

en donde  $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$

La aproximación en elementos finitos conduce a las siguientes etapas del cálculo.

Los movimientos en un elemento genérico  $i$  se expresan en función de los movimientos nodales, en la forma:

$$U_{ji}(x,y,z) = \underline{n}_i \underline{u}_j \quad (j = x,y,z) \quad (D.24)$$

o en forma matricial

$$\underline{U}_i = \underline{N}_i \underline{U} \quad (D.25)$$

en donde  $\underline{n}_i$  es un vector de dimensión  $(1 \times n)$  de funciones de interpolación para el elemento de  $n$  nudos y  $\underline{N}_i$  es la matriz de dimensión  $(3 \times n)$  del sistema fluido tridimensional. La aplicación de las ecuaciones - (D.17) y (D.18) conduce a la relación entre los cambios de volumen y rotaciones del elemento:

$$\underline{e}_i = \underline{B}_i \underline{U} \quad (D.26)$$

La energía de deformación del sistema es:

$$U = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} \quad (D.27)$$

La energía potencial de superficie se expresa en función de los movimientos verticales de los nudos de superficie como sigue:

$$V_c = \frac{1}{2} \underline{U}_c^T \underline{S} \underline{U}_c \quad (d.28)$$

Por último la energía cinética se escribe:

$$T = \frac{1}{2} \underline{V}^T \underline{M} \underline{V} \quad (D.29)$$

En las ecuaciones anteriores  $\underline{U}$  y  $\underline{V}$  representan los vectores de movimientos y velocidades en todos los nudos. Las matrices simétricas  $\underline{K}$ ,  $\underline{S}$  y  $\underline{M}$  se definen en la tabla D.1.

La aplicación de la ecuación de Lagrange conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{U}}_s = \underline{\underline{R}} \quad (\text{D.30})$$

o bien

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{K}}^* \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}$$

siendo R un vector de fuerzas nodales dependientes del tiempo.

En la tabla D.1 se resumen todas las ecuaciones precisas para la descripción del comportamiento de sistemas líquidos idealizados mediante el método de los elementos finitos. La principal ventaja de la formulación de Wilson basada en movimientos, estriba en su compatibilidad con los métodos de rigidez directa utilizada en el análisis de estructuras (sólidos). Por lo tanto, los sistemas sólido-líquido pueden ser modelizados con el mismo tipo de elementos.

TABLA D.1 Resumen de la formulación del elemento fluido.

Ecuaciones matriciales que rigen el movimiento

$$\underline{M} \underline{U}(t) + \underline{K} \underline{U}(t) + \underline{S} \underline{U}_c(t) = \underline{R}$$

con

$\underline{U}(t)$  = vector de movimientos nodales.

$\underline{U}_s(t)$  = vector de movimientos verticales en los nudos de superficie.

$\ddot{\underline{U}}(t)$  = vector de aceleración nodales.

$\underline{R}(t)$  = vector de fuerzas nodales.

$\underline{S}$  = matriz simétrica de términos de potencial de superficie de finida como

$$\underline{S} = \sum \underline{S}_j \quad \text{con} \quad \underline{S}_j = w \int \underline{n}_i^T \underline{n}_j dA_j$$

La suma  $j$  se extiende únicamente sobre los elementos, superficiales horizontales y  $w$  es el peso específico del fluido.

$\underline{K}$  = matriz simétrica de compresibilidad y de restricción de rotación.

$$\underline{K} = \sum \underline{K}_i \quad \text{con} \quad \underline{K}_i = \int \underline{B}_i^T \underline{C}_i \underline{B}_i dV_i$$

$\underline{M}$  = matriz simétrica de masa.

$$\underline{M} = \sum \underline{M}_i \quad \text{con} \quad \underline{M}_i = m \int \underline{N}_i^T \underline{N}_i dV_i$$

La suma  $i$  sobre todos los elementos del fluido y  $m$  es la densidad.

Integración numérica

Cuadrilátero de cuatro nudos - 1 punto en todos los términos.

Cuadrilátero de nueve nudos - 4 puntos (2x2) en todos los términos.

Elemento 3-D de ocho nudos - 1 punto en todos los términos.

Elemento 3-D de 27 nudos - 8 puntos (2x2x2) en todos los términos.

## REFERENCIAS

- (1) WESTERGAARD, H.M. "Water pressures on dams during earthquakes".  
Trans. Am. Soc. Eng. (1931).
- (2) BACK, P.A.A., CARSELL, A.C., DUNGAR, R. y SEVERN, R.T. "The seismic study of a double curvature dam". Proc. Inst. Civ. Eng. 43 (1969).
- (3) CLOUGH, R.W., NIWA, A. y CLOUGH, D.P. "Experimental seismic studies of cylindrical tanks". Struc. Eng. J. ASCE ST 12 Dic. (1979).
- (4) WILSON, E.L. y CHOPRA, A.K. "Earthquake analysis of reservoir-dams systems". Four World Conf. of Earth. Eng. Santiago. Chile Enero (1969).
- (5) ZIENCKIEWICZ, O.C. y BETLES, P. "Fluid-structure dynamic interaction and wave forces, an introduction to numerical treatment". Int. Journ. Num. Meth. Engen. 13 (1978).
- (6) WILSON, E.L. y KHALVATE, M. "Finite Elementos for the Dynamic Analysis of Fluid-Solid Systems". Journ Num. Meth. in Enging. 19 (1983).